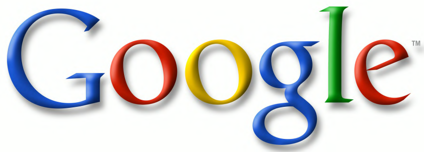





SEAL OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LET THERE BE LIGHT
1868

RECHTLIJNIGE EN BOLVORMIGE

# DRIEHOEKSMETING.

# LOBATTO'S LEERBOEK

DER

RECHTLIJNIGE EN BOLVORMIGE

# DRIEHOEKSMETING.

Vierde Druk,

BEWERKT EN VERMEERDERD

DOOR

**Dr. P. VAN GEER.**
Hoogleeraar aan de Leidsche Hoogeschool.

MET UITSLAANDE PLATEN.

SCHOONHOVEN,
S. & W. N. VAN NOOTEN.
1877.

# VOORREDE TOT DEN DERDEN DRUK.

Op verzoek van de Uitgevers nam ik de taak op mij, een Derden Druk van LOBATTO'S *Leerboek der rechtlijnige en bolvormige Driehoeksmeting* te bezorgen.

Geenszins ontveinsde ik mij de eigenaardige moeilijkheden aan deze taak verbonden, en aarzelde wijzigingen en uitbreidingen te geven aan het werk van den afgestorven schrijver.

Wat mij echter noopte aan het verzoek gehoor te geven, was de begeerte om den naam van LOBATTO levend te houden onder de beoefenaars ook van de beginselen der wiskunde. De verdiensten op wiskundig gebied van den beroemden Delftschen Hoogleeraar zijn te groot om uit het geheugen te geraken, doch geen middel is zoo geschikt den naam in eer te houden als een Leerboek, bestemd voornamelijk voor degenen, welke nog geen grooten weg op het gebied der wetenschap hebben afgelegd.

Ook onderscheidt zich zijn Leerboek zoo gunstig van vele anderen over hetzelfde onderwerp, zooals het onverminderd gebruik aantoont, dat door het uitverkocht zijn van den tweeden druk, het verschijnen van een derden wenschelijk werd. Wellicht zou een onveranderd herdrukken voldoende geweest zijn; doch elf jaren sedert het verschijnen van den tweeden druk verloopen zijnde, was eene herziening zeker wenschelijk. Gaarne had ik die taak aan een wiskundige van meer naam en ervaring overgelaten, en zou haar gewis niet aanvaard hebben, wanneer een driejarig verblijf in Delft mij niet in de gelegenheid gesteld had den derden druk voor een gedeelte naar de inzichten van den schrijver zelven te bewerken. Herhaaldelijk toch had ik het voorrecht, zoowel mondeling als schriftelijk, met den Delftschen geleerde van gedachten te wisselen ook over de inrichting van dit Leerboek, dat destijds als handleiding bij mijne lessen in de driehoeksmeting aan de hoogere Burgerschool werd gebruikt. Hoezeer ook ingenomen met dit werk, had ik verschillende bezwaren tegen de inrichting en wijze van behandeling, welke bezwaren op de meest heusche en welwillende wijze door den geleerden schrijver werden opgelost of erkend, zoodat hij mij meedeelde, bij een eventueelen derden druk van zijn werk

daarop te zullen letten. De dood heeft hem niet in de gelegenheid gesteld dat voornemen uit te voeren, maar nu achtte ik mij ook bij deze geschikte gelegenheid gerechtigd, de door ons besproken wenschelijke wijzigingen aan te brengen.

De veranderingen en uitbreidingen, door mij in het oorspronkelijk werk gebracht, zullen elken belangstellende bij het vergelijken van den tweeden en derden druk in het oog vallen, zoodat ik mij liever onthoud ze hier op te sommen; of zij verbeteringen mogen genoemd worden, laat ik ter beslissing aan de beoefenaars der driehoeksmeting over. Verre van mij, om even als achter den *tweeden*, ook achter den *derden* van *verbeterden* druk te spreken, het doel van uitgave en bewerking zal echter volkomen bereikt zijn, wanneer deze druk niet minder de gunst van het wiskundig publiek in Nederland mag verwerven, dan met de voorgaande drukken is gebleken het geval te zijn.

*Leiden*, 1869. DE BEWERKER.

---

# VOORREDE TOT DEN VIERDEN DRUK.

Deze nieuwe uitgave van het Leerboek onderscheidt zich slechts weinig van de voorgaande. Behalve eenige noodzakelijke verbeteringen van ondergeschikten aard bestaat de voornaamste verandering uit het weglaten van de paragraaf, die uitsluitend handelde over de oplossing van vraagstukken der driehoeksmeting door middel van oneindig voortloopende reeksen. Ik meende namelijk, dat dit onderwerp niet in een elementair leerboek thuis behoort; maar eerst bij de hoogere Algebra of Algebraïsche Analysis kan behandeld worden. In de leerboeken over dezen tak der wiskunde vindt men het in hoofdzaak terug.

*Leiden*, 1877. v. G.

---

# INHOUD.

## EERSTE HOOFDSTUK.

### GONIOMETRIE.



## TWEEDE HOOFDSTUK.

### RECHTLIJNIGE OF VLAKKE DRIEHOEKSMETING.

## DERDE HOOFDSTUK.

### BOLVORMIGE DRIEHOEKSMETING.

# EERSTE HOOFDSTUK.

## Goniometrie.

### § 1.

*Verklaring van de goniometrische grootheden en van hare teekens.*

1. Volgens het geleerde in de beginselen der meetkunde, komen bij de beschouwing eens rechtlijnigen driehoeks zes samenstellende deelen of elementen in aanmerking; te weten, drie hoeken en drie zijden, die zoodanig aan elkander verbonden zijn, dat men in staat is, om, wanneer drie dezer elementen (mits eene der zijden hieronder begrepen) in grootte gegeven zijn, den driehoek door *constructie* te bepalen.

De gewone of rechtlijnige driehoeksmeting heeft ten doel om, uit de getallenwaarden dezer elementen eens driehoeks, die der overige onbekende elementen alleen door *berekening*, in plaats van door constructie, te vinden; welke handelwijze steeds de voorkeur boven de laatste verdient, uithoofde der grootere mate van nauwkeurigheid, waarvoor zij uit haren aard in de toepassing vatbaar is. Te dien einde maakt men gebruik van bepaalde betrekkingen, die tusschen hoeken en zekere daarvan afhankelijke rechte lijnen bestaan, en waardoor de getallen-waarden der eerste uit die dezer laatste grootheden, en ook omgekeerd, kunnen afgeleid worden. Die betrekkingen zijn het onderwerp van een in lateren tijd gevormden tak der wiskunde, genaamd *Goniometrie* of Meetkunde der hoeken, welke, zoo als in het vervolg zal blijken, den grondslag der beide driehoeksmetingen uitmaakt. Het eerste gedeelte van dit leerboek zal alzoo uitsluitend de

*Goniometrie* bevatten; echter alleen binnen zoodanigen omvang beperkt, als tot de kennis der driehoeksmetingen gevorderd wordt; dewijl eene meer uitvoerige behandeling van dat belangrijk gedeelte der wiskunde, tot op de tegenwoordige hoogte der wetenschap voortgezet, buiten het bestek dezer beginselen zoude liggen.

Wij zullen ons derhalve in de eerste plaats met de theorie der goniometrische grootheden en van hare teekens bezig houden, en vervolgens overgaan tot de eigenlijke driehoeksmeting, die slechts als eene toepassing dezer theorie te beschouwen is.

2. Zij ACM (fig. 1) een willekeurige scherpe hoek en beschrijft men uit het hoekpunt als middelpunt met een willekeurigen straal AC een cirkel, dan wordt volgens meetkundige beginselen de hoek gemeten door den boog AM, die tusschen de beenen is begrepen. Evenzoo zal bij een bepaalden straal de lengte der koorde AM alleen afhangen van de grootte van den hoek, doch zij is tot maat ongeschikt, omdat de betrekkingen tusschen hoeken en koorden vrij samengesteld zijn, zooals later nader zal blijken.

Laat men uit het snijpunt M van het eene been met den cirkel eene loodlijn MP neer op het andere been, dan wordt de verhouding van deze lijn tot den straal de *sinus* van den hoek ACM of van den boog AM genoemd. Deze verhouding is onafhankelijk van de lengte van den straal, want trekt men (fig. 2) met eene andere lijn $CA_{,}$ tot straal den cirkelboog $A_{,}M_{,}$, dan is de verhouding van $M_{,}P_{,}$ tot $CA_{,}$, evenzoo de sinus van den hoek ACM. Nu zijn de driehoeken ACM en $A_{,}CM_{,}$ wegens hunne gelijkhoekigheid gelijkvormig, derhalve de overeenkomstige loodlijnen evenredig aan de zijden. Dit geeft

$$MP : CA = M_{,}P_{,} : CA_{,},$$

waardoor de gelijkheid der genoemde verhoudingen bewezen is.

Men zou ook om den sinus te vinden de loodlijn uit A op CM kunnen neêrlaten, maar dan verkrijgt men weder dezelfde waarde, omdat de loodlijnen uit de hoekpunten aan de basis van een gelijkbeenigen driehoek op de overstaande zijden neergelaten, gelijk zijn. Hieruit blijkt, dat de grootte van den sinus alleen afhangt van de grootte van den hoek; terwijl omgekeerd, wanneer men zich voorloopig tot scherpe hoeken bepaalt, bij elken sinus slechts één hoek behoort. Derhalve kan de sinus tot maat der hoeken dienen.

Er zijn echter nog andere lijnen in de figuur, die tot het-

De Plaatsbepaling van een punt door middel van 2 lood lijnen op 2 gegeven loodlijnen is de grondslag van de Analytische Meetkunde van Descartes (gestorven 1650)

---

Het ontstaan van dat het woord Sinus is van zeer bijzonder aard en werpt licht op de ontwikkeling der Wiskunde als op de wetenschappelijke band tusschen verschillende volken op verschillende tijden.
Grieksche Wiskundigen (vooral Ptolemaeus, 150 n. C.) hadden voor astronomisch gebruik de koorden berekend van verschillende middelpuntshoeken; de Indiers (500 n. C.) hadden de g vervangen de geheele koorde door de halve, doch maakten verder geen gebruik van het hierin liggende voordeel.
Eerst de Arabieren, die zulk een belangrijke rol hebben gespeeld in de wording der Wiskunde, deden dit; zij namen ook den Indischen naam voor koorde, jiva, over en schreven dit woord, zooals zij het verstonden n. l. dschiba. De klinkers van dit woord laten echter ook de lezing dschaib toe, dat werkelijk een Arabisch woord is en inham of boezem beteekent.
Volgens de hypothese van den Orientalist Munk is dan het eigenlijke woord verloren gegaan en steeds het laatste woord gebruikt; in allen geval de oudste vertalers van Arabische werken is het Latijn vertaalden dschaib door Sinus, het Latijnsche woord voor boezem, en zoo is het gebleven.

---

Volgens prof. de Goeje moet dschiba zonder dschib en dit is koorden. De metathesis is dan niet noodig.

(ontvangen v Batavia).

hetzelfde doel leiden. Trekt men namelijk in A (fig. 1) eene loodlijn op AC, dat is eene raaklijn tot den cirkel, tot zij het andere been in N snijdt, dan wordt de verhouding van AN tot den straal de *tangens* van den hoek genoemd. Op dezelfde wijze als voor den sinus, kan worden aangetoond, dat de tangens alleen afhangt van de grootte van den hoek en tot maat van dezen kan dienen. De verhouding van het stuk CN, dat door den tangens van het been wordt afgesneden, tot den straal wordt de *secans* van den hoek genoemd en verkeert onder gelijke omstandigheden als de *sinus* en de *tangens*.

Noemende den hoek ACM ter vereenvoudiging $a$ en den straal $r$, dan worden de drie verhoudingen, die de grootte van den hoek aanwijzen, ter bekorting aldus geschreven:

$$sin\, a = \frac{MP}{r},\ tang\, a = \frac{AN}{r},\ sec\, a = \frac{CN}{r}.$$

Nemen wij van den hoek $a$ het complement $MCA_1$, door in C de loodlijn $CA_1$ op AC te trekken, dan heeft ook deze hoek zijn sinus, tangens en secans, namelijk:

$$sin\, A_1CM = \frac{MQ}{r},\ tang\, A_1CM = \frac{A_1N_1}{r},\ sec\, A_1CM = \frac{CN_1}{r}.$$

Daar deze verhoudingen het complement bepalen, zoo kunnen zij ook tot bepaling van den hoek zelven dienen. Ter bekorting wordt dan de *sinus* van het *complement* de *cosinus* van den hoek genoemd, evenzoo de *tangens* van het *complement* de *cotangens*, en de *secans* van het complement de *cosecans*, hetgeen aldus wordt geschreven:

$$cos\, a = sin\,(90^\circ - a) = \frac{MQ}{r},$$

$$cot\, a = tang\,(90^\circ - a) = \frac{A_1N_1}{r},$$

$$cosec\, a = sec\,(90^\circ - a) = \frac{CN_1}{r}.$$

Als overstaande zijden van een rechthoek is MQ = CP, dus kan ook de verhouding tusschen CP, dat is tusschen den afstand van het hoekpunt tot het voetpunt van den sinus, en den straal als de *cosinus* van den hoek beschouwd worden.

Behalve de zes genoemde voorname goniometrische vormen, namelijk de *sinus*, *cosinus*, *tangens*, *cotangens*, *secans* en *cosecans*, zijn er nog eenige andere, die zelden gebruikt worden, maar toch

*

niet onvermeld mogen blijven. Hiertoe behoort de *sinus versus*, zijnde de verhouding tusschen den afstand van het voetpunt van den sinus tot het uiteinde van het been en den straal, dat is:

$$sin\ vers\ a = \frac{PA}{r}.$$

Evenzoo heeft men den cosinus versus, zijnde de sinus versus van het complement, derhalve:

$$cos\ vers\ a = \frac{QA_1}{r}$$

en eindelijk de reeds in het begin genoemde *koorde* van den overeenkomstigen boog, doch ook gemeten op den straal, dat is:

$$koorde\ a = \frac{AM}{r}.$$

De koorde van het complement wordt nimmer in rekening gebracht.

3. Alle goniometrische grootheden zijn verhoudingen tusschen lijnen en dus onbenoemde getallen. Zij b. v. $\angle ACM = 45^{\circ}$, dan is in den gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek CPM,

$$MP = CP = CM\sqrt{\tfrac{1}{2}} = r\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

en in den driehoek CAN,

$$AN = CA = r,$$
$$CN = CA\sqrt{2} = r\sqrt{2},$$

eindelijk in den driehoek $A_1CN_1$,

$$A_1N_1 = CA_1 = r,$$
$$CN_1 = CA_1\sqrt{2} = r\sqrt{2},$$

gevende:

$$sin\ 45^{\circ} = \frac{MP}{r} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$cos\ 45^{\circ} = \frac{CP}{r} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$tang\ 45^{\circ} = \frac{AN}{r} = 1,$$

$$cot\ 45^{\circ} = \frac{A_1N_1}{r} = 1,$$

$$sec\ 45^{\circ} = \frac{CN}{r} = \sqrt{2},$$

$$cosec\ 45^{\circ} = \frac{CN_1}{r} = \sqrt{2}.$$

Evenzoo kan men door eenvoudige meetkundige eigenschappen gemakkelijk de goniometrische grootheden voor hoeken van 60° en 30° vinden. Het zal later blijken, op welke wijze men deze verhoudingen, die over het algemeen onmeetbare getallen zijn, voor elken gegeven hoek of boog heeft kunnen berekenen.

Zoo lang de beschouwing bepaald blijft tot hoeken, die in denzelfden cirkel staan, of door bogen, met gelijke stralen beschreven, gemeten worden, kan men den straal gelijk aan de eenheid nemen, omdat hij de gemeenschappelijke maat is van alle goniometrische grootheden, die kunnen voorkomen. Dit nu heeft bij de goniometrie altijd plaats, omdat deze tak der wiskunde zich tot hoeken bepaalt, die altijd door cirkelbogen met gelijke stralen gemeten worden. In die onderstelling, dat is voor $CA = r = 1$, gaan de goniometrische verhoudingen over in de goniometrische lijnen, die dan zijn:

$$\begin{aligned} \textit{sin}\ a &= MP, & \textit{cos}\ a &= CP, \\ \textit{tang}\ a &= AN, & \textit{cot}\ a &= A_1N_1, \\ \textit{sec}\ a &= CN, & \textit{cosec}\ a &= CN_1, \\ \textit{sin vers}\ a &= AP, & \textit{cos vers}\ a &= A_1Q, \end{aligned}$$
$$\textit{koorde}\ a = AM.$$

Zoodra wij echter bij de toepassing der goniometrie op de driehoeksmeting te doen krijgen met hoeken, die door cirkelbogen, met verschillende stralen beschreven, gemeten worden, zullen wij terugkeeren tot de oorspronkelijke beteekenis der goniometrische grootheden als onbenoemde verhoudingen.

4. Gaan wij thans na, welke veranderingen in de hoegrootheid en ligging der goniometrische lijnen ontstaan, indien wij, het been CA van den hoek ACM onveranderlijk aannemende, het andere been CM alle hoeken van 0° tot 360° doen doorloopen. Om de voorstelling gemakkelijk te maken verdeelen wij den cirkel (fig. 3) door twee onderling loodrechte middellijnen AB en $A_1B_1$ in vier kwadranten, waarvan $ACA_1$ het eerste, $A_1CB$ het tweede, $BCB_1$ het derde en $B_1CA$ het vierde kwadrant genoemd wordt. Overeenkomstig hiermede spreekt men van een hoek in het eerste kwadrant, wanneer hij meer dan 0° en minder dan 90° bevat; een hoek in het tweede kwadrant, wanneer hij meer dan 90° en minder dan 180° bevat; in het derde kwadrant, wanneer hij meer dan 180° en minder dan 270°, en in het vierde kwadrant, wanneer hij meer dan 270° en minder dan 360° bevat.

Verder moet nu niet alleen op de grootte, maar ook op de teekens der goniometrische lijnen gelet worden. Hieromtrent is men algemeen het volgende overeen gekomen.

De *sinus* is *positief*, zoolang hij boven de middellijn AB is gelegen; *negatief*, wanneer hij er onder valt.

De *cosinus* is *positief*, wanneer hij van het hoekpunt *rechts* en *negatief*, wanneer hij *links* is gelegen.

De *tangens*, die altijd wordt gemeten op de raaklijn tot den cirkel in het punt A, is *positief* wanneer hij van A naar *boven* en *negatief* wanneer hij van A naar *beneden* wordt geteld.

De *cotangens*, die altijd is gelegen op de raaklijn in $A_1$, is *positief*, wanneer hij van $A_1$ *rechts* en *negatief*, wanneer hij van $A_1$ *links* valt.

De *secans* en *cosecans*, die altijd op het veranderlijke been worden gemeten van af het hoekpunt tot het snijpunt met de lijn der tangenten en de lijn der cotangenten, zijn *positief*, wanneer zij op het veranderlijke been zelf zijn gelegen en *negatief*, wanneer zij op zijn verlengde vallen.

Deze teekens zijn zoodanig aangenomen, dat in het eerste kwadrant alle lijnen positief zijn.

De overgang der verschillende kwadranten wordt gevormd door de hoeken van 0°, 90°, 180° en 270°, waar de goniometrische lijnen bepaalde waarden verkrijgen.

Bij den aanvang der beweging de boog AM nul zijnde, zoo heeft men blijkbaar:

$$\sin 0^\circ = 0, \qquad \cos 0^\circ = 1,$$
$$\operatorname{tang} 0^\circ = 0, \qquad \cot 0^\circ = \infty,$$
$$\sec 0^\circ = 1, \qquad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty,$$

Dat de cotangens en de cosecans hier als oneindig groot voorkomen, laat zich uit de figuur gemakkelijk opmaken, dewijl, het punt M in A zijnde, de lijnen $A_1N_1$ en CM evenwijdig loopen en haar snijpunt op oneindigen afstand gelegen is.

Is de hoek ACM recht, dan zal de sinus zijne grootste, de cosinus daarentegen zijne kleinste waarde bereikt hebben, terwijl de tangens en de secans, wegens de evenwijdigheid van AN en CM, beide oneindig groot geworden zijn, zoodat men heeft:

$$\sin 90^\circ = 1, \qquad \cos 90^\circ = 0,$$
$$\operatorname{tang} 90^\circ = \infty, \qquad \cot 90^\circ = 0,$$
$$\sec 90^\circ = \infty, \qquad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1,$$

5. Nemen wij nu een hoek in het tweede kwadrant, den stom-

pen hoek $ACM_1$, en zien wij hoe het met de teekens zijner goniometrische lijnen gesteld is. Volgens de vooropgestelde bepalingen blijft de sinus *positief*, als zijnde boven de middellijn gelegen, doch de cosinus is *negatief*, omdat hij van C uit links wordt geteld. De tangens is nu $AN_3$, dus *negatief*, evenzoo de cotangens $A_1N_2$. De secans $CN_3$ is gelegen op het verlengde van het veranderlijke been dus *negatief*, en de cosecans $CN_2$ op het been zelf, dus *positief.*

In de figuur (fig. 1) is de hoek $ACM_1$ zoodanig genomen, dat zijn supplement $BCM_1$ gelijk is aan $\angle$ ACM, en nu blijkt dat zijne goniometrische lijnen volstrekt genomen, even lang zijn als de overeenkomstige lijnen van den laatstgenoemden hoek. Lettende op de teekens heeft men dus:

$$\sin(180^\circ - a) = + \sin a,$$
$$\cos(180^\circ - a) = - \cos a,$$
$$\operatorname{tang}(180^\circ - a) = - \operatorname{tang} a,$$
$$\cot(180^\circ - a) = - \cot a,$$
$$\sec(180^\circ - a) = - \sec a,$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ - a) = + \operatorname{cosec} a;$$

of in woorden: *de sinus en dc cosecans van een hoek zijn gelijk aan den sinus en den cosecans van zijn supplement; de cosinus, tangens, cotangens en secans van een hoek zijn gelijk aan den cosinus, tangens, cotangens en secans van zijn supplement met omgekeerd teeken.*

Is de hoek juist 180° en valt dus het veranderlijke been in het verlengde van CA, dan heeft men, wegens de evenwijdigheid van CB en $A_1N_2$:

$$\sin 180^\circ = 0, \qquad \cos 180^\circ = -1,$$
$$\operatorname{tang} 180^\circ = 0, \qquad \cot 180^\circ = \infty,$$
$$\sec 180^\circ = 1, \qquad \operatorname{cosec} 180^\circ = \infty,$$

Van negatief oneindig groot kan bij deze beschouwingen evenmin sprake zijn als van negatief nul, omdat beide slechts voorkomen als overgangen van den positieven tot den negatieven toestand.

6. Zij $ACM_2$ (fig. 3) een hoek in het derde kwadrant, dan zien wij dat zijn sinus $M_2P_2$, als gelegen beneden AB, *negatief* en zijn cosinus $CP_2$ als in het vorig kwadrant ook *negatief* is. De tangens AN en de cotangens $A_1N_1$ zijn beiden *positief* geworden; maar de secans CN en de cosecans $A_1N_1$ *negatief*, omdat zij op het verlengde van het veranderlijke been $M_2C$ gelegen zijn.

In de figuur is $\angle$ $ACM_2$ zoodanig genomen, dat $M_2C$ het verlengde is van CM, derhalve

$$\angle ACM_2 = \angle ACM + 180^\circ = 180^\circ + a,$$

Uit de gelijk- eu gelijkvormigheid der driehoeken $P_2CM_2$ en PCM volgt de volstrekte gelijkheid van $M_2P_2$ met MP en van $CP_2$ met CP. Lettende op de teekens heeft men aldus:

$$\begin{aligned} sin\,(180^0 + a) &= - \; sin\,a\,, \\ cos\,(180^0 + a) &= - \; cos\,a\,, \\ tang\,(180^0 + a) &= + \; tang\,a\,, \\ cot\,(180^0 + a) &= + \; cot\,a\,, \\ sec\,(180^0 + a) &= - \; sec\,a\,, \\ cosec\,(180^0 + a) &= - \; cosec\,a\,, \end{aligned}$$

Wentelt het been $CM_2$ tot het op de lijn $CB_1$ valt, dan bevat de hoek $270^0$. Bij dezen overgang van het derde tot het vierde kwadrant worden de goniometrische lijnen als volgt:

$$sin\,270^0 = -1\,, \qquad cos\,270^0 = 0\,,$$
$$tang\,270^0 = \infty\,, \qquad cot\,270^0 = 0\,,$$
$$sec\,270^0 = \infty\,, \qquad cosec\,270^0 = -1.$$

7. Komt het veranderlijke been in den stand $CM_3$, dan ligt de inspringende hoek $ACM_3$ in het vierde kwadrant. De sinus $M_3P_3$ is *negatief*, maar de cosinus $CP_3$ *positief*, de tangens $AN_3$ wordt *negatief*, evenzoo de cotangens $A_1N_2$. De secans $CN_3$ ligt op het been zelf én is dus *positief*, de cosecans $CN_2$ ligt op het verlengde en is dus *negatief*.

Ware $CM_3$ zoodanig getrokken, dat de uitspringende hoek $ACM_3$ gelijk was aan ∟ ACM, dan zouden P en $P_3$ samen gevallen en dus PM en $P_3M_3$ in elkanders verlengde gekomen zijn. Tevens was dan

$$\text{inspringende hoek } ACM = 360^0 - ACM = 360^0 - a\,,$$

terwijl de volstrekte waarde der goniometrische lijnen van deze beide hoeken niet zou verschillen. Lettende op de behoorlijke teekens heeft men dus:

$$\begin{aligned} sin\,(360^0 - a) &= - \; sin\,a\,, \\ cos\,(360^0 - a) &= + \; cos\,a\,, \\ tang\,(360^0 - a) &= - \; tang\,a\,, \\ cot\,(360^0 - a) &= - \; cot\,a\,, \\ sec\,(360^0 - a) &= + \; sec\,a\,, \\ cosec\,(360^0 - a) &= - \; cosec\,a. \end{aligned}$$

8. Valt het been $CM_3$ bij zijne verdere wenteling op CA, dan wordt de hoek $360^0$ of, wat op hetzelfde neêrkomt, keert terug tot het uitgangspunt $0^0$. De goniometrische lijnen van $360^0$ zijn derhalve geheel dezelfde als van $0^0$. Evenzoo kan men ∟ $ACM_3$, die bij de gewone wijze van wenteling inspringend was, ook als

$\sin(90-a) = \cos a$
$\cos(\quad) = \sin a$
$\operatorname{tg}(\quad) = \cot a$
$\cot(\quad) = \operatorname{tg} a$
$\sec(\quad) = \operatorname{cosec} a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = \sec a$

$\sin(90+a) = \cos a$
$\cos(\quad) = -\sin a$
$\operatorname{tg}(\quad) = -\cot a$
$\cot(\quad) = -\operatorname{tg} a$
$\sec(\quad) = -\operatorname{cosec} a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = \sec a$

$\sin(270+a) = -\cos a$
$\cos(\quad) = \sin a$
$\operatorname{tg}(\quad) = -\cot a$
$\cot(\quad) = -\operatorname{tg} a$
$\sec(\quad) = \operatorname{cosec} a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = -\sec a$

$\sin(270-a) = -\cos a$
$\cos(\quad) = -\sin a$
$\operatorname{tg}(\quad) = \cot a$
$\cot(\quad) = \operatorname{tg} a$
$\sec(\quad) = -\operatorname{cosec} a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = -\sec a$

$\sin(180-a) = \sin a$
$\cos(\quad) = -\cos a$
$\operatorname{tg}(\quad) = -\operatorname{tg} a$
$\cot(\quad) = -\cot a$
$\sec(\quad) = -\sec a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = \operatorname{cosec} a$

$\sin(180+a) = -\sin a$
$\cos(\quad) = -\cos a$
$\operatorname{tg}(\quad) = \operatorname{tg} a$
$\cot(\quad) = \cot a$
$\sec(\quad) = -\sec a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = -\operatorname{cosec} a$

$\sin(360^\circ-a) = -\sin a$
$\cos(\quad) = \cos a$
$\operatorname{tg}(\quad) = -\operatorname{tg} a$
$\cot(\quad) = -\cot a$
$\sec(\quad) = \sec a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = -\operatorname{cosec} a$

$\sin(360^\circ+a) = \sin a$
$\cos(\quad) = \cos a$
$\operatorname{tg}(\quad) = \operatorname{tg} a$
$\cot(\quad) = \cot a$
$\sec(\quad) = \sec a$
$\operatorname{cosec}(\quad) = \operatorname{cosec} a.$

[illegible];

uitspringend beschouwen, maar dan is het been $CM_3$ in tegenovergestelden zin gedraaid, zoodat de hoek als negatief moet beschouwd worden. Onder die omstandigheden gaat het bovenstaande tafeltje over in:

$$\begin{aligned} sin\,(-a) &= -\ sin\ a\,, \\ cos\,(-a) &= +\ cos\ a\,, \\ tang\,(-a) &= -\ tang\ a\,, \\ cot\,(-a) &= -\ cot\ a\,, \\ sec\,(-a) &= +\ sec\ a\,, \\ cosec\,(-a) &= -\ cosec\ a. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat de *cosinus en de secans van een negatieven hoek in grootte en teeken gelijk zijn aan den cosinus en secans van denzelfden positieven hoek, doch de andere goniometrische lijnen het tegenovergesteld teeken hebben.*

9. Trekken wij thans al het voorgaande in het navolgend tafeltje te samen, dan bekomen wij hierdoor een algemeen overzicht van de teekens, waarmede de goniometrische lijnen voor positieve hoeken in de vier verschillende kwadranten zijn aangedaan. Wij zullen straks een eenvoudig hulpmiddel aanwijzen om, ook buiten de beschouwing van eene figuur, in elk gegeven geval, terstond het teeken der goniometrische lijn te bepalen, en alzoo het bedoelde tafeltje gemakkelijk te kunnen ontwerpen.

TAFEL VAN DEN POSITIEVEN EN NEGATIEVEN TOESTAND DER GONIOMETRISCHE LIJNEN.

| | 0° | 1e kwadr. | 90° | 2e kwadr. | 180° | 3e kwadr. | 270° | 4e kwadr. | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Sinus* | 0 | + | 1 | + | 0 | — | —1 | — | 0 |
| *Cosinus* | 1 | + | 0 | — | —1 | — | 0 | + | 1 |
| *Tangens* | 0 | + | ∞ | — | 0 | + | ∞ | — | 0 |
| *Cotangens* | ∞ | + | 0 | — | ∞ | + | 0 | — | ∞ |
| *Secans* | 1 | + | ∞ | — | —1 | — | ∞ | + | 1 |
| *Cosecans* | ∞ | + | 1 | + | ∞ | — | —1 | — | ∞ |

Wij hebben in het voorgaande overzicht niet begrepen den sinus en cosinus versus, evenmin als de koorde, vermits elke

dezer lijnen in de vier onderscheidene kwadranten het positieve teeken behoudt *). Niets belet nu om den bewegenden straal op nieuw de achtereenvolgende kwadranten, en alzoo den geheelen cirkel eenige malen achtereen te doen doorloopen. In het 5e kwadrant zullen de goniometrische lijnen zich alsdan in denzelfden toestand bevinden als in het eerste, en dus allen positief zijn, terwijl de teekens in de 6e, 7e en 8e kwadranten respectievelijk met die in de 2e, 3e en 4e kwadranten zullen overeenkomen.

10. De koorde AM maakt echter hieromtrent eene uitzondering, daar zij, te beginnen met het 5e kwadrant, negatief wordt, en eerst nadat het punt M ten tweede male den geheelen omtrek doorgeloopen heeft, wederom tot den positieven toestand overgaat. Van deze opmerkelijke eigenschap kan men zich gemakkelijk overtuigen door de volgende beschouwing.

Zij namelijk XX′ (fig. 4) eene onbepaalde lijn, draaiende om het vaste punt A, en beschouwen wij haar in de vier aangewezen standen, waarbij zij den omtrek achtereenvolgens in de punten M, $M_1$, $M_2$, $M_3$ snijdt, als wanneer de lijnen AM, $AM_1$, $AM_2$, $AM_3$ de koorden in de vier eerste kwadranten zullen voorstellen. Nemen wij nu elken afstand AM als positief aan, wanneer hij in de richting AX′ gesteld wordt, dan is het duidelijk dat, zoodra de bewegende lijn XX′ eene halve omwenteling volbracht heeft en den cirkel wederom in M snijdt, de punten X, X′, hierbij onderling van plaats zullen verwisseld zijn, zoodat nu AM in *tegengestelde* richting van AX′ geteld wordende, nood-

---

*) Men zal reeds hebben opgemerkt, dat de goniometrische lijnen, even als alle andere grootheden, niet van den positieven tot den negatieven toestand kunnen overgaan, of omgekeerd, zonder intusschen nul of oneindig groot te worden. Bij de sinussen en cosinussen kan alleen het eerste plaats vinden; bij de overige lijnen kunnen zich beide omstandigheden voordoen. Men mag evenwel die eigenschap niet omkeeren, en, uit het door nul of door het oneindige gaan der grootheden, besluiten dat zij hierom van teeken moeten veranderen. De vergelijkingen $y = (a-x)^2$ en $y = \frac{1}{(a-x)^2}$ kunnen zulks ten duidelijkste aanduiden, dewijl $y$ in elk der beide gevallen $x < a$ en $x > a$, het positieve teeken behoudt, hoezeer die grootheid voor $x = a$, inmiddels nul of oneindig groot geworden zij. De goniometrische lijnen geven zelfs hiervan een voorbeeld. Zoo wordt de sinus versus $= 0$, zoodra de hoek tot 360° aangegroeid is; doch bij den overgang van het vierde tot het vijfde kwadrant, verkrijgt hij wederom eene positieve waarde.

Bij 180 ± a, en bij 360° ± a blijven de lijnen dezelfde; het teeken is dat, wat de lijn is in het quadrant, waar men is.
Bij 90 ± a en bij 270° ± a worden de lijnen de cofunctiën en het teeken is dat, wat de lijn heeft in het quadrant, waar men is.

zakelijk als negatief te beschouwen is, hetgeen met de drie volgende kwadranten eveneens het geval zal moeten zijn.

11. Zij nu $k$ een geheel positief getal, dan zullen tot elk der hoeken

$$a, a + 2.180^\circ, a + 4.180^\circ \ldots\ldots a + 2k.180^\circ,$$

naar aanleiding van het voorgaande, dezelfde goniometrische lijnen (de koorde alleen uitgezonderd) behooren, waardoor men alzoo, met inachtneming van het hiervoren verklaarde, in het algemeen zal mogen stellen:

$$\begin{array}{ll} & sin\,a = sin\,(2k.180^\circ + a), \\ & sin\,a = sin\,(180^\circ - a) = sin\,\{(2k+1)\,180^\circ - a\}, \\ & cos\,a = cos\,(2k.180^\circ + a), \\ & cos\,a = cos\,(-a) = cos\,(2k.180^\circ - a), \\ (1) & tang\,a = tang\,(180^\circ + a) = tang\,(k.180^\circ + a), \\ & cot\,a = cot\,(180^\circ + a) = cot\,(k.180^\circ + a), \\ & sec\,a = sec\,(2k.180^\circ + a), \\ & sec\,a = sec\,(-a) = sec\,(2k.180^\circ - a), \\ & cosec\,a = cosec\,(2k.180^\circ + a), \\ & cosec\,a = cosec\,(180^\circ - a) = cosec\,\{(2k+1)\,180^\circ - a\}, \end{array}$$

waaruit dus blijkt, dat, ofschoon tot elken gegeven hoek slechts ééne bepaalde goniometrische lijn behoort, daarentegen een oneindig aantal hoeken aan te wijzen zijn, waartoe *dezelfde* goniometrische lijn behoort.

12. De voorgaande beschouwing in verband met het tafeltje van n°. 9, geven nog aanleiding tot de volgende opmerkingen:

1°. dat de sinus en de cosecans, de cosinus en de secans, de tangens en de cotangens steeds hetzelfde teeken bezitten. De reden hiervan zal later blijken.

2°. dat elk der goniometrische lijnen positief is in twee en ook negatief in twee kwadranten. Zoo zijn de sinus en cosecans positief in het eerste en tweede, de cosinus en secans in het eerste en vierde, de tangens en cotangens in het eerste en derde kwadrant.

3°. dat de *sinus* en de *cosinus* nimmer de waarde van $+1$ en $-1$ kunnen overschrijden, omdat die goniometrische lijnen altijd kleiner blijven, hoogstens gelijk worden aan den straal des cirkels. Sinus en cosinus zijn dus altijd positieve of negatieve breuken en omgekeerd zal elke positieve of negatieve breuk de sinus of cosinus van een hoek voorstellen. Vindt

men als uitkomst eener berekening een sinus of cosinus grooter dan één, dan weet men zeker dat het vraagstuk onmogelijk of de berekening fout is.

4°. dat de *tangens* en *cotangens* alle mogelijke positieve en negatieve waarden kunnen bezitten, omdat zij zich op hunne lijnen van nul tot positief en negatief oneindig groot uitstrekken. Omgekeerd kan dus elk positief of negatief getal gelijk gesteld worden aan een tangens of cotangens.

5°. dat de *secans* en *cosecans* zich kunnen uitstrekken van $+\infty$ en $-\infty$ tot $+1$ en $-1$, maar geene volstrekte waarden kleiner dan de eenheid kunnen bekomen, omdat deze lijnen zich altijd van uit het middelpunt tot buiten den cirkel uitstrekken en dus altijd grooter dan, minstens gelijk aan den straal zijn. Derhalve kunnen nimmer positieve of negatieve breuken gelijk aan een secans of cosecans gesteld worden.

In het tafeltje van n°. 9 zijn de *sinus versus* en *cosinus versus* wegens hunne mindere belangrijkheid niet opgenomen, hoewel wij opgemerkt hebben, dat zij in alle kwadranten positief blijven, als wordende steeds in dezelfde richting geteld. Uit fig. 3 kunnen gemakkelijk de waarden dezer lijnen voor de grenzen der kwadranten opgemaakt worden. Men vindt dan:

| | |
|---|---|
| $\textit{sin vers}\ 0^\circ = 0$, | $\textit{cos vers}\ 0^\circ = 1$, |
| $\textit{sin vers}\ 90^\circ = 1$, | $\textit{cos vers}\ 90^\circ = 0$, |
| $\textit{sin vers}\ 180^\circ = 2$, | $\textit{cos vers}\ 180^\circ = 1$, |
| $\textit{sin vers}\ 270^\circ = 1$, | $\textit{cos vers}\ 270^\circ = 2$, |

Ook de waarde der koorden kan voor deze hoeken gemakkelijk uit eene figuur worden afgeleid.

## § 2.

### *Betrekkingen tusschen de goniometrische lijnen tot denzelfden hoek behoorende.*

13. Tusschen de onderscheidene goniometrische lijnen van den zelfden hoek bestaan vaste betrekkingen van afhankelijkheid, die van groot belang zijn, daar zij den grondslag der geheele goniometrie uitmaken.

De gelijkvormige rechthoekige driehoeken CPM, CAN, $CA_1N_1$, (fig. 1) geven het middel aan de hand om die betrekkingen op te

sporen. Men heeft namelijk in de eerste plaats door toepassing van het theorema van PYTHAGORAS op elk dezer driehoeken, daarbij den straal des cirkels tot lengte-eenheid aannemende,
in $\triangle$ CPM:

$$MP^2 + CP^2 = CM^2,$$

$$\text{of } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \, ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

in $\triangle$ CAN:

$$CA^2 + AN^2 = CN^2,$$

$$\text{of } 1 + \tang^2 a = \sec^2 a \, ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

in $\triangle\ CA_1N_1$:

$$CA_1^2 + A_1N_1^2 = CN_1^2,$$

$$\text{of } 1 + \cot^2 a = \operatorname{cosec}^2 a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Vervolgens geeft de gelijkvormigheid der driehoeken CPM en CAN:

$$MP : NA = CP : CA = CM : CN,$$

$$\text{of } \sin a : \tang a = \cos a : 1 = 1 : \sec a,$$

dat is:

$$\tang a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Uit de gelijkvormigheid van $\triangle$ CPM met $\triangle\ CA_1N_1$ volgt:

$$MP : CA_1 = CP : A_1N_1 = CM : CN_1,$$

$$\text{of } \sin a : 1 = \cos a : \cot a = 1 : \operatorname{cosec} a;$$

gevende:

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5) \; (6)$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Eindelijk geeft de gelijkvormigheid van $\triangle$ CAN met $\triangle\ CA_1N_1$:

$$AN : CA_1 = CA : A_1N_1 = CN : CN_1$$

$$\text{of } \tang a : 1 = 1 : \cot a = \sec a : \operatorname{cosec} a;$$

derhalve:

$$\cot a = \frac{1}{\tang a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$\tang a = \frac{\sec a}{\operatorname{cosec} a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Deze negen betrekkingen kunnen niet onderling onafhankelijk zijn, want er komen slechts zes veranderlijke grootheden in voor, en deze kunnen hoogstens door vijf onafhankelijke betrekkingen verbonden zijn. Zal echter een hoek door ééne goniometrische

lijn bepaald wezen, dan moeten tusschen de zes grootheden werkelijk vijf onafhankelijke betrekkingen bestaan, en uit deze de andere betrekkingen afgeleid kunnen worden.

Gaan wij b. v. uit van de vijf formulen:

$$sin^2 a + cos^2 a = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$1 + tang^2 a = sec^2 a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$1 + cot^2 a = cosec^2 a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$tang\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$cot\, a = \frac{cos\, a}{sin\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

dan volgt al dadelijk uit (4) en (6):

$$cot\, a = \frac{1}{tang\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Uit (2) en (4) volgt:

$$1 + \frac{sin^2 a}{cos^2 a} = sec^2 a,$$

of $cos^2 a + sin\, a = cos^2 a \,.\, sec^2 a$,

dat is, lettende op (1):

$$1 = cos^2 a \,.\, sec^2 a,$$

derhalve:

$$sec\, a = \frac{1}{cos\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Evenzoo geven (3) en (6):

$$1 + \frac{cos^2 a}{sin^2 a} = cosec^2 a,$$

$$sin^2 a + cos^2 a = sin^2 a \,.\, cosec^2 a,$$

$$1 = sin^2 a \,.\, cosec^2 a,$$

$$cosec\, a = \frac{1}{sin\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Eindelijk volgt uit (4), (5) en (6):

$$tang\, a = \frac{\frac{1}{cosec\, a}}{\frac{1}{sec\, a}} = \frac{sec\, a}{cosec\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Op dezelfde wijze kan men uit elke vijf onderling onafhankelijke, de vier andere betrekkingen afleiden.

Om deze voorname formulen gemakkelijk te onthouden, kan men ze op de volgende wijze in woorden uitdrukken:

1°. *De som der vierkanten van den sinus en cosinus, het verschil der vierkanten van den secans en den tangens en het verschil der vierkanten van den cosecans en den cotangens is gelijk aan de eenheid.*

2°. *De cosecans is het omgekeerde van den sinus, de secans het omgekeerde van den cosinus, de cotangens het omgekeerde van den tangens.*

3°. *De tangens is gelijk aan de verhouding van den sinus tot den cosinus, de cotangens aan de verhouding van den cosinus tot den sinus.*

Eenige eigenschappen aangaande de teekens en de grenswaarden dezer goniometrische lijnen, die in de vorige paragraaf uit de figuur zijn gevonden, kunnen uit de bovenstaande betrekkingen worden afgeleid.

De formulen (5), (7) en (8) leeren, dat sinus en cosecans, cosinus en secans, tangens en cotangens steeds hetzelfde teeken bezitten, terwijl uit (4) en (6) blijkt, dat tangens en cotangens positief zijn, wanneer sinus en cosinus gelijk teeken, doch negatief, wanneer zij ongelijk teeken bezitten. Hierdoor kan men terstond al de teekens der goniometrische lijnen opschrijven, wanneer men slechts onthoudt, dat de sinus in het eerste en tweede, de cosinus in het eerste en vierde kwadrant positief is.

Uit de formule (1) volgt, dat sinus en cosinus altijd gelegen zijn tusschen $+1$ en $-1$; uit formule (2) en (3), dat de secans en cosecans altijd grooter dan $+1$ of kleiner dan $-1$ zijn.

Uit fig. 1 volgt nog:

$$AP = AC - CP,$$

$$\text{of } \mathit{sin\ vers}\ a = 1 - \cos a; \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$A_1Q = A_1C - CQ,$$

$$\text{of } \mathit{cos\ vers}\ a = 1 - \sin a; \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$AM^2 = AB \times AP,$$

$$\text{of } \mathit{koorde}^2\ a = 2 \times \mathit{sin\ vers}\ a = 2(1 - \cos a) \quad \ldots \quad (12)$$

door welke formulen de sinus versus, de cosinus versus en de koorde uit den sinus en cosinus kunnen afgeleid worden. Door (10) en (11) wordt bevestigd, dat de *sin vers* en *cos vers* altijd positief zijn, omdat *sin a* en *cos a* nimmer grooter dan 1 kunnen worden.

14. Voor het gemak en de duidelijkheid zijn al de voorgaande formulen afgeleid, in de onderstelling, dat de hoek in het eerste kwadrant is gelegen, hoewel reeds stilzwijgend is gebruik gemaakt van hare algemeene geldigheid. Dit laatste valt niet moeilijk aan te toonen door den hoek in een ander kwadrant te nemen en de zelfde bewerking toe te passen, daarbij lettende op de teekens, die de goniometrische lijnen door verschil van richting verkrijgen. Neemt men b. v. den hoek $ACM_1$ (fig. 3) in het tweede kwadrant, dan worden de gelijkvormige rechthoekige driehoeken: $CP_1M_1$, $CAN_3$ en $CA_1N_2$; voor den hoek $ACM_2$ in het derde kwadrant heeft men de driehoeken: $CP_2M_2$, $CAN$ en $CA_1N_1$; voor den hoek $ACM_3$ in het vierde kwadrant de driehoeken: $CP_3M_3$, $CAN_3$ en $CA_1N_2$; het zal terstond blijken, dat elk dezer groepen van driehoeken dezelfde betrekkingen oplevert als de oorspronkelijke.

15. Daar elke hoek bepaald is door één goniometrische lijn, moet het ook mogelijk zijn door middel van de gevonden formulen elke goniometrische lijn in elk der anderen uit te drukken.

Nemen wij tot voorbeeld den sinus en zoeken de formulen, waardoor hij uit den cosinus, tangens enz. wordt berekend.

Form (1) geeft terstond:

$$\sin a = \sqrt{(1 - \cos^2 a)},$$

en form (7)

$$\sin a = \frac{1}{\operatorname{cosec} a};$$

derhalve in verband met (3)

$$\sin a = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot^2 a)}};$$

hierin de waarde van $\cot a$ uit (8) substitueerende:

$$\sin a = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 a}\right)}} = \frac{\operatorname{tang} a}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 a)}};$$

eindelijk ingevolge (1) en (5):

$$\sin a = \sqrt{(1 - \cos^2 a)} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sec^2 a}\right)} = \frac{\sqrt{(\sec^2 a - 1)}}{\sec a}.$$

Op dergelijke wijze voor elk der goniometrische lijnen te werk gaande, verkrijgt men het volgende volledige samenstel betrekkingen:

$$sin\,a = \sqrt{(1 - cos^2 a)} = \frac{tang\,a}{\sqrt{(1 + tang^2 a)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + cot^2 a)}}$$
$$= \frac{\sqrt{(sec^2 a - 1)}}{sec\,a} = \frac{1}{cosec\,a}, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$cos\,a = \sqrt{(1 - sin^2 a)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + tang^2 a)}} = \frac{cot\,a}{\sqrt{(1 + cot^2 a)}}$$
$$= \frac{1}{sec\,a} = \frac{\sqrt{(cosec^2\,a - 1)}}{cosec\,a} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$tang\,a = \frac{sin\,a}{\sqrt{(1 - sin^2 a)}} = \frac{\sqrt{(1 - cos^2\,a)}}{cos\,a} = \frac{1}{cot\,a}$$
$$= \sqrt{(sec^2\,a - 1)} = \frac{1}{\sqrt{(cosec^2\,a - 1)}} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$cot\,a = \frac{\sqrt{(1 - sin^2 a)}}{sin\,a} = \frac{cos\,a}{\sqrt{(1 - cos^2\,a)}} = \frac{1}{tang\,a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(sec^2\,a - 1)}} = \sqrt{(cosec^2\,a - 1)} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$sec\,a = \frac{1}{\sqrt{(1 - sec^2\,a)}} = \frac{1}{cos\,a} = \sqrt{(1 + tang^2\,a)}$$
$$= \frac{\sqrt{(1 + cot^2\,a)}}{cot\,a} = \frac{cosec\,a}{\sqrt{(cosec^2\,a - 1)}} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$cosec\,a = \frac{1}{sin\,a} = \frac{1}{\sqrt{(1 - cos^2\,a)}} = \frac{\sqrt{(1 + tang^2\,a)}}{tang\,a}$$
$$= \sqrt{(1 + cos^2\,a)} = \frac{sec\,a}{\sqrt{(sec^2\,a - 1)}} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Door deze formulen kan men alle goniometrische lijnen van een hoek berekenen, wanneer eene gegeven is. Alleen met betrekking tot het teeken kan eenige moeilijkheid ontstaan bij die formulen, waarin eene wortelgrootheid voorkomt. Daarom moet het teeken zoo veel mogelijk vooruit worden opgemaakt, dan behoeft men slechts de volstrekte waarde der lijnen in rekening te brengen. Is het echter niet bekend, in welk kwadrant de bedoelde hoek gelegen is, dan blijft er steeds eenige dubbelzinnigheid, omdat elke goniometrische lijn tot twee hoeken kleiner dan 360° behoort.

Is b.v. van een hoek gegeven de sinus, dan kan hij in twee kwadranten gelegen zijn, bij positieve waarde in het eerste en tweede, bij negatieve in het derde en vierde. Tot nadere bepaling moet dan gegeven zijn, òf het kwadrant waarin de hoek ligt, òf het teeken van eene der andere goniometrische lijnen (behalve diegene, welke het omgekeerde van de gegevene is).

Weet men b. v. van een hoek, dat zijn sinus negatief en zijn cosinus positief is, dan moet hij in het vierde kwadrant zijn gelegen. Bij de toepassing der goniometrie op de driehoeksmeting is het bezwaar niet groot, omdat men daar in den regel te doen heeft met hoeken kleiner dan 180°, zoodat dan alleen de sinus dubbelzinnigheid kan geven, terwijl het teeken van den cosinus of tangens terstond aanwijst, in welk der beide kwadranten de hoek is gelegen.

1e **Voorbeeld.** *De goniometrische lijnen te berekenen voor een hoek van* 120°.

De hoek ligt in het tweede kwadrant, dus zijn de sinus en de cosecans positief, de andere lijnen negatief. Zij (fig. 3) $\angle ACM_1 = 120°$, dan is $\angle P_1CM_1 = 60°$, en dus in den rechthoekigen driehoek $CM_1P_1$ volgens eene bekende meetkundige eigenschap:

$$CP_1 = \tfrac{1}{2}\, CM_1$$
$$\text{of } \cos 120° = -\tfrac{1}{2}.$$

Hieruit volgt:

$$\sin 120° = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tang} 120° = \frac{\sin a}{\cos a} = -\sqrt{3},$$

$$\cot 120° = \frac{\cos a}{\sin a} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\sec 120° = \sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 a)} = \frac{1}{\cos a} = -2,$$

$$\operatorname{cosec} 120° = \sqrt{(1 + \cot^2 a)} = \frac{1}{\sin a} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

2e **Voorbeeld.** *Van een hoek is de sinus* $= -\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, *de overige goniometrische lijnen te berekenen.*

In alle gevallen heeft men:

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = -\sqrt{3}.$$

Daar verder de hoek zoowel in het derde als vierde kwadrant kan gelegen zijn, blijft het teeken der andere lijnen onbepaald. Deze verkrijgen dus het dubbele teeken, en dit zullen wij zoo plaatsen, dat het bovenste geldt voor het derde, het onderste voor het vierde kwadrant.

$$\cos a = \sqrt{(1 - \sin^2 a)} = \mp \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$cot\, a = \frac{1}{tang\, a} = \pm \sqrt{2},$$

$$sec\, a = \frac{1}{cos\, a} = \mp \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Verder door de formulen (10) — (12):

$$sin\, vers\, a = 1 - cos\, a = 1 \pm \sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

$$cos\, vers\, a = 1 - sin\, a = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$koorde\, a = 2\sqrt{(1 - cos\, a)} = 2\sqrt{(1 \pm \sqrt{\tfrac{2}{3}})}.$$

Tot verdere oefening mogen de volgende opgaven dienen. *De waarde van alle goniometrische lijnen te berekenen,*

1°. *van elk der hoeken* 150°, 210°, 315°;

2°. *van een hoek, wiens cosinus* $= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$;

3°. *van een hoek, wiens tangens* $= -\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$.

Eene enkele opmerking kan hierbij niet ondienstig zijn. Later is het dikwijls noodig den sinus of cosinus van een hoek uit zijn tangens te berekenen. Stel nu dat gegeven is:

$$tang\, a = \frac{p}{q},$$

dan volgt uit de voorgaande formulen:

$$sin\, a = \frac{tang\, a}{\sqrt{(1 + tang^2 a)}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2)}},$$

$$cos\, a = \frac{1}{\sqrt{(1 + tang^2 a)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)}} = \frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2)}},$$

waaruit deze eenvoudige regel kan opgemaakt worden. Schrijft men de tangens in den vorm eener gewone breuk, hetgeen altijd kan geschieden, dan is de sinus gelijk aan den teller gedeeld door den wortel uit de som der vierkanten van teller en noemer, en de cosinus gelijk aan den noemer gedeeld door het zelfde getal.

## § 3.

*Betrekkingen tusschen de goniometrische lijnen tot verschillende hoeken behoorende.*

16. Wij gaan nu over van de betrekkingen, die tusschen de goniometrische lijnen van denzelfden hoek bestaan, tot diegene,

welke de goniometrische lijnen van verschillende hoeken onderling verbinden. Daar de hoeken, volgens de voorwaarde in § 1 genoemd, door bogen met gelijken straal beschreven moeten gemeten worden, kunnen wij ze in denzelfden cirkel plaatsen met de hoekpunten in het middelpunt.

Zij dus (fig. 5) $\angle$ ACB $= a$ een willekeurige hoek, en zetten wij op het veranderlijke been CB ter wederzijde een anderen willekeurigen hoek BCD $=$ BCD$_1$ $= b$, dan is:

$$\angle ACD = a + b, \qquad \angle ACD_1 = a - b,$$

en nu is in de eerste plaats de vraag, om de goniometrische lijnen van de beide laatstgenoemde hoeken uit te drukken in die van $a$ en $b$. Trekken wij daartoe BE, DF, D$_1$F$_1$ loodrecht op AC, dan is:

$$BE = \sin a, \qquad CE = \cos a,$$
$$DF = \sin(a+b), \qquad CF = \cos(a+b),$$
$$D_1F_1 = \sin(a-b), \qquad CF_1 = \cos(a-b).$$

Vereenigen wij nog D met D$_1$, dan is deze lijn loodrecht op CB, omdat CB den hoek DCD$_1$ midden doordeelt. Zij G het snijpunt van CB en DD$_1$, dan is, wanneer CB als het vaste, CD als het veranderlijke been van $\angle$ DCB beschouwd wordt,

$$DG = \sin b, \qquad CG = \cos b.$$

Als hulplijnen trekken wij nog door G eene lijn IH loodrecht op AC en DI, D$_1$I$_1$ evenwijdig aan AC, dan zijn de driehoeken DIG en D$_1$I$_1$G gelijk en gelijkvormig, omdat zij behalve gelijke hoeken nog DG $=$ D$_1$G hebben. Hieruit volgt:

$$IG = I_1G \quad \text{en} \quad ID = I_1D_1.$$

Nu is:

$$DF = IH = HG + GI,$$
$$D_1F_1 = I_1H = HG - GI_1 = HG - GI,$$
$$CF = CH - HF = CH - ID,$$
$$CF_1 = CH + HF_1 = CH + I_1D_1 = CH + ID.$$

De eerste leden dezer vergelijkingen zijn de grootheden, die berekend moeten worden, zoodat alles neêrkomt op het bepalen van de vier lijnen, die de laatste leden samenstellen.

Hiertoe beschouwen wij in de eerste plaats de gelijkvormige driehoeken CBE en CGH, waarin

$$EB : HG = CE : CH = CB : CG,$$

of

$$\sin a : HG = \cos a : CH = 1 : \cos b,$$

derhalve

$$HG = sin\, a\; cos\, b\,, \qquad CH = cos\, a\;\; cos\, b.$$

Uit de gelijkvormige driehoeken CBE en EGI volgt:

$$EB : ID = CE : GI = CB : DG\,,$$

of

$$sin\, a : ID = cos\, a : GI = 1 : sin\, b\,,$$

gevende

$$ID = sin\, a\;\; sin\, b\,, \qquad GI = cos\, a\;\; sin\, b.$$

Substitueert men de gevonden waarden in de genoemde vergelijkingen, dan verkrijgt men:

$$sin\,(a + b) = sin\, a\;\; cos\, b + cos\, a\;\; sin\, b \quad \ldots\ldots \quad (19)$$
$$sin\,(a - b) = sin\, a\;\; cos\, b - cos\, a\;\; sin\, b \quad \ldots\ldots \quad (20)$$
$$cos\,(a + b) = cos\, a\;\; cos\, b - sin\, a\;\; sin\, b \quad \ldots\ldots \quad (21)$$
$$cos\,(a - b) = cos\, a\;\; cos\, b + sin\, a\;\; sin\, b \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Door deze vergelijkingen worden de sinussen en cosinussen van de som en het verschil van twee hoeken uitgedrukt in de sinussen en cosinussen van de afzonderlijke hoeken. Zij zijn de grondformulen der goniometrie, omdat alle andere uit deze afgeleid worden.

De tweede kan uit de eerste worden afgeleid, wanneer men $+b$ door $-b$ vervangt, dan toch, zoo als in § 1 is gebleken, blijft *cos b* onveranderd, maar gaat *sin b* over in $-sin\, b$; evenzoo kan de vierde uit de derde worden afgeleid. Korter schrijft men de vier formulen in dezen vorm

$$sin\,(a \pm b) = sin\, a\;\; cos\, b \pm cos\, a\;\; sin\, b$$
$$cos\,(a \pm b) = cos\, a\;\; cos\, b \mp sin\, a\;\; sin\, b.$$

Het zal voor den leerling niet ondienstig zijn de vier grondformulen in woorden uit te drukken, ten einde die gemakkelijk in het geheugen te behouden.

Ofschoon het voorgaande betoog eeniglijk gegrond is op het geval, waarin elk der hoeken $a$ en $b$ minder dan $90^0$ is, zoo kan men zich echter, door het ontwerpen eener afzonderlijke figuur, gemakkelijk overtuigen, dat die formulen insgelijks waar zijn, bijaldien men elk der hoeken van 0 tot $360^0$ laat aangroeien, en zij derhalve de vereischte algemeenheid bezitten.

17. Wij zullen thans doen zien, op welke wijze men daaruit een groot aantal andere goniometrische betrekkingen kan afleiden, die, zoo als in het vervolg blijken zal, in de toepassingen der goniometrie van zeer uitgestrekt gebruik zijn.

In de eerste plaats mogen wij niet onopgemerkt laten, dat indien men in de gevonden formulen, voor $a$ achtereenvolgens 90°, 180°, 270° en 360° schrijft, men alsdan de navolgende reeds vroeger (n°. 7 en 8) uit de figuur afgeleide formulen wederom bekomt.

$$\begin{array}{ll} \sin(\ 90^\circ \pm b) = \cos b, & \cos(\ 90^\circ \pm b) = \mp \sin b, \\ \sin(180^\circ \pm b) = \mp \sin b, & \cos(180^\circ \pm b) = -\cos b, \\ \sin(270^\circ \pm b) = -\cos b, & \cos(270^\circ \pm b) = \pm \sin b, \\ \sin(360^\circ \pm b) = \pm \sin b, & \cos(360^\circ \pm b) = \cos b, \end{array}$$

waaruit de positieve en negatieve toestand der sinussen en cosinussen in de vier eerste kwadranten nader bevestigd wordt.

Verder volgt uit die formulen nog, door de letters $a$ en $b$ onderling te verwisselen:

$$\sin(b-a) = -\sin(a-b), \qquad \cos(b-a) = \cos(a-b),$$

en dus, $b - a = p$ stellende,

$$\sin p = -\sin(-p), \qquad \cos p = \cos(-p),$$

hetgeen met het verklaarde in n°. 8 geheel overeenstemt.

18. De form. (19) en (20) door elkander deelende, komt er

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a \ \cos b + \sin b \ \cos a}{\sin a \ \cos b - \sin b \ \cos a},$$

en dit laatste gebroken, onder en boven, door $\cos a \cos b$ deelende, vinden wij, met behulp van (4) en (8):

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{tg\, a + tg\, b}{tg\, a - tg\, b} = \frac{\cot b + \cot a}{\cot b - \cot a} \quad . \ . \ . \quad (23)$$

Dezelfde bewerking op de form. (21) en (22) toepassende, bekomen wij

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{1 - tg\, a\, tg\, b}{1 + tg\, a\, tg\, b} = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a \cot b + 1} \quad . \ . \quad (24)$$

Wanneer wij daarentegen de form. (19) door de form. (21) deelen, zoo ontstaat hieruit, na den teller en noemer der breuk door het product $\cos a \ \cos b$ gedeeld te hebben,

$$tg\,(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \ tg\, b} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (25)$$

Op dezelfde wijs komt er

$$tg\,(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \ tg\, b} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (26)$$

dus ook

$$cot\,(a+b)=\frac{1-tg\,a\,tg\,b}{tg\,a+tg\,b}=\frac{cot\,a\,cot\,b-1}{cot\,a+cot\,b}\quad . \; . \; . \quad (27$$

en
$$cot\,(a-b)=\frac{1+tg\,a\,tg\,b}{tg\,a-tg\,b}=\frac{cot\,a\,cot\,b+1}{cot\,b-cot\,a}\quad . \; . \; . \quad (28)$$

Stellende in al de voorgaande formulen $b=a$ en daarna $2a=\alpha$, dus $a=\frac{1}{2}\alpha$, dan verkrijgen wij de navolgende goniometrische betrekkingen tusschen een hoek en zijn tweevoud.

$$sin\,2a=2\,sin\,a\,\;cos\,a. \qquad sin\,\alpha=2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\;\,cos\,\tfrac{1}{2}\,\alpha \quad . \; . \quad (29)$$

$$cos\,2a=cos^2 a-sin^2 a. \quad cos\,2a=1-2\,sin^2 a=2\,cos^2 a-1. \quad (30)$$

$$1-cos\,2\,a=2\,sin^2\,a. \qquad 1+cos\,2\,a=2\,cos^2\,a \quad . \; . \quad (31)$$

$$sin\,a=\sqrt{\left(\frac{1-cos\,2a}{2}\right)}. \qquad sin\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=\sqrt{\left(\frac{1-cos\,\alpha}{2}\right)} \quad . \; . \quad (32)$$

$$cos\,a=\sqrt{\left(\frac{1+cos\,2a}{2}\right)}. \qquad cos\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=\sqrt{\left(\frac{1+cos\,\alpha}{2}\right)} \quad . \; . \quad (33)$$

$$tg\,2\,a=\frac{2\,tg\,a}{1-tg^2\,a}=\frac{2\,cot\,a}{cot^2\,a-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (34)$$

$$cot\,2\,a=\frac{1-tg^2\,a}{2\,tg\,a}=\tfrac{1}{2}\,(cot\,a-tg\,a) \quad . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Uit de deeling van (32) door (33) volgt nog,

$$tg\,a=\sqrt{\left(\frac{1-eos\,2\,a}{1+cos\,2\,a}\right)}. \qquad tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=\sqrt{\left(\frac{1-cos\,\alpha}{1+eos\,\alpha}\right)} \quad . \; . \quad (36)$$

of
$$tg\,a=\frac{sin\,2\,a}{1+cos\,2\,a}=\frac{1-cos\,2\,a}{sin\,2\,a}=cosec\,2\,a-cot\,2\,a.$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=\frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha}=\frac{1-cos\,\alpha}{sin\,\alpha}=cosec\,\alpha-cot\,\alpha \quad . \; . \; . \quad (37)$$

$$cot\,a=\sqrt{\left(\frac{1+cos\,2a}{1-cos\,2a}\right)}. \qquad cot\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=\sqrt{\left(\frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}\right)}.$$

$$cot\,a=\frac{sin\,2\,a}{1-cos\,2\,a}=\frac{1+cos\,2\,a}{sin\,2\,a}=cosec\,2\,a+cot\,2\,a.$$

$$cot\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=\frac{sin\,\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{1+cos\,\alpha}{sin\,\alpha}=cosec\,\alpha+cot\,\alpha \quad . \; . \quad (38)$$

voorts uit (37) en (38): $tg\,\alpha\;tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=sec\,\alpha-1 \quad . \; . \; . \; , \quad (39)$

$tg\,\alpha\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=sec\,\alpha+1 \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$

Door optelling en aftrekking vindt men uit (37) en (38):

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha+cot\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=2\,cosec\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

$$cot\,\tfrac{1}{2}\,\alpha-tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha=2\,cot\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

De form. (36) geeft tevens

$$\cos 2a = \frac{1 - tg^2 a}{1 + tg^2 a}, \text{ dus } \sin 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 + tg^2 a} \quad . \quad . \quad (43)$$

eindelijk volgt uit (12) en (32)

$$koorde\ a = 2 \sin \tfrac{1}{2} a\,,$$

hetgeen ook onmiddellijk uit de figuur afgeleid kon worden.

19. Stelt men verder $a = 45^0$, dan geven de beide grondformulen (19) en (21), omdat $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$$\sin(45^0 + b) = \cos(45^0 - b) = \tfrac{1}{2}(\cos b + \sin b)\sqrt{2} \quad . \quad (44)$$

$$\cos(45^0 + b) = \sin(45^0 - b) = \tfrac{1}{2}(\cos b - \sin b)\sqrt{2} \quad . \quad (45)$$

Uit (25) en (26) volgt in dezelfde onderstelling,

$$tg(45^0 \pm b) = \cot(45^0 \mp b) = \frac{1 \pm tg\, b}{1 \mp tg\, b} = \frac{\cot b \pm 1}{\cot b \mp 1} \quad . \quad . \quad (46)$$

Uit (31) door $a = 45^0 - \frac{1}{2}\alpha$ te stellen:

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2(45 - \tfrac{1}{2}\alpha),\ \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin\alpha}{2}\right)} \quad . \quad (47)$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2(45 - \tfrac{1}{2}\alpha),\ \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1 + \sin\alpha}{2}\right)} \quad . \quad (48)$$

$$tg(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \cot(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)} = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

$$= \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha - tg\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

$$tg(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) = \cot(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}\right)} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \sec\alpha + tg\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

En uit (42) en (41)

$$tg\,\alpha = \tfrac{1}{2}\left\{\cot(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) - tg(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha)\right\} \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\sec\alpha = \tfrac{1}{2}\left\{tg(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) + \cot(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha)\right\} \quad . \quad . \quad (52)$$

Wanneer wij de formulen (19) en (20) optellen en van elkander aftrekken, komt er

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin a \cos b\,,$$

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2\sin b \cos a.$$

Op gelijke wijze geven de formulen (21) en (22)

$$\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2\cos a \cos b\,,$$

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2\sin a \sin b.$$

(1) Deze formules worden de <u>prosthaphäretische</u> formules genoemd

Προσθεσισ = optelling

αφαιρεσισ = aftrekking.

Schrijven wij in deze vier formulen, voor $a+b$, $p$, en voor $a-b$, $q$, dan is $a = \frac{1}{2}(p+q)$ en $b = \frac{1}{2}(p-q)$. Hierdoor gaan zij over in:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \; . \; . \quad (53)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \quad . \; . \; . \quad (54)$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \; . \; . \quad (55)$$

$$\cos q + \cos p = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \; . \; . \quad (56)$$

die door deeling de navolgende opleveren:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{tg \frac{1}{2}(p+q)}{tg \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p-q)}{\cot \frac{1}{2}(p+q)} \quad . \; . \; . \quad (57)$$

$$\frac{\cos q - \cos p}{\cos q + \cos p} = \frac{tg \frac{1}{2}(p+q)}{\cot \frac{1}{2}(p-q)} = tg \tfrac{1}{2}(p+q)\, tg \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \quad (58)$$

en door vermenigvuldiging, hierbij onder het oog houdende dat

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \cos \tfrac{1}{2} \alpha = \sin \alpha,$$

$$(\sin p + \sin q)(\sin p - \sin q) = \sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p+q) \sin(p-q) \; (59)$$

$$(\cos p + \cos q)(\cos q - \cos p) = \cos^2 q - \cos^2 p = \sin(p+q) \sin(p-q) \; (60)$$

In deze beide laatste formulen voor den hoek $p$ zijn complement $90^0 - p$ schrijvende, zoo verkrijgt men hieruit

$$(\cos p + \sin q)(\cos p - \sin q) = \cos^2 p - \sin^2 q$$
$$= \cos(p+q) \cos(p-q) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

$$(\sin p + \cos q)(\cos q - \sin q) = \cos^2 q - \sin^2 p$$
$$= \cos(p+q) \cos(p-q).$$

Behalve de voorgaande, laten zich uit de form. (53) tot (56) nog de volgende afleiden, door namelijk beurtelings daarin te stellen

$$p = 45^0 + a, \qquad q = 45^0 - a,$$
$$p = 30^0 + a, \qquad q = 30^0 - a,$$

$$\sin(45^0 + a) + \sin(45^0 - a) = \cos a \sqrt{2} \quad . \; . \quad (62)$$

$$\sin(45^0 + a) - \sin(45^0 - a) = \sin a \sqrt{2} \quad . \; . \quad (63)$$

$$\sin(30^0 + a) + \sin(30^0 - a) = \cos a \quad . \; . \; . \; . \quad (64)$$

$$\cos(30^0 - a) - \cos(30^0 + a) = \sin a \quad . \; . \; . \; . \quad (65)$$

dus ook

$$\cos(60^0 + a) + \cos(60^0 - a) = \cos a \quad . \; . \; . \; . \quad (66)$$

$$\sin(60^0 + a) - \sin(60^0 - a) = \sin a \quad . \; . \; . \; . \quad (67)$$

Stellende in (62) en (63) $a = \frac{1}{2}\alpha$, dan vindt men nog met behulp van (47) en (48) de twee formulen:

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + \sin \alpha)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \sin \alpha)} \quad . \; . \quad (68)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + \sin \alpha)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \sin \alpha)} \quad . \; . \quad (69)$$

welke met (32) en (33) volmaakt overeenstemmen. Immers door ze in het vierkant te brengen, bekomt men wederom

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(1 - \sin^2 a)}\right) = \frac{1 + \cos a}{2},$$

en
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{(1 - \sin^2 a)}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}.$$

**20.** Het zoude niet moeilijk vallen, de voorgaande formulen met nog een aantal andere van gelijken aard te vermeerderen. De hier medegedeelde zijn echter die, welke, hetzij bij goniometrische herleidingen, hetzij bij samenstelling der sinustafels (waarover straks nader) het meest voorkomen. Uit dien hoofde onthouden wij ons, daaraan eene overtollige uitbreiding te geven. Wij zullen echter nog ten slotte hier eenige belangrijke goniometrische betrekkingen tusschen drie verschillende hoeken laten volgen, waarvan wij het betoog aan den lezer ter oefening overlaten.

$$\sin(a+b+c) = \left\{\begin{array}{l} \sin a \cos b \cos c \\ + \sin b \cos a \cos c \\ + \sin c \cos a \cos b \end{array}\right\} - \sin a \sin b \sin c \quad (70)$$

$$\sin(a+b+c) = \left\{\begin{array}{l} \sin a \cos(b+c) \\ + \sin b \cos(a+c) \\ + \sin c \cos(a+b) \end{array}\right\} + 2 \sin a \sin b \sin c \quad (71)$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \left\{\begin{array}{l} \cos a \sin b \sin c \\ + \cos b \sin a \sin c \\ + \cos c \sin a \sin b \end{array}\right\} \quad (72)$$

$$\cos(a+b+c) = \left\{\begin{array}{l} \cos c \cos(a+b) \\ + \cos b \cos(a+c) \\ + \cos a \cos(b+c) \end{array}\right\} - 2 \cos a \cos b \cos c \quad (73)$$

Voor $a + b + c = 90^\circ$, is

$$1 - \sin^2 a - \sin^2 b - \sin^2 c = 2 \sin a \sin b \sin c \quad (74)$$

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \cos a \cos b \cos c \quad (75)$$

Voor $a + b + c = 180^\circ$,

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c \quad (76)$$

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c = 2 \cos a \cos b \cos c \quad (77)$$

$$\sin^2 c - \sin^2 a - \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos c = 0 \quad (78)$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c \quad (79)$$

$$tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a\, tg\, b\, tg\, c \quad (80)$$

$$\cot a \cot b + \cot a \cot c + \cot b \cot c = 1 \quad (81)$$

Voor $a + b + c = 360^\circ$,

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 0 \quad (82)$$

$$tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a\, tg\, b\, tg\, c \quad (83)$$

$$tg\, a\, tg\, b + tg\, a\, tg\, c + tg\, b\, tg\, c = 1 - \sec a \sec b \sec c. \quad (84)$$

**21.** Stellen wij thans in de formulen (71) en (73), $a = b = c$, dan volgt hieruit ten eerste,

$$\sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a = 3 \sin a\,(1 - \sin^2 a) - \sin^3 a$$

$$\text{dus} \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Verder

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a = \cos^3 a - 3 \cos a\,(1 - \cos^2 a)$$

$$\text{of} \quad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

waardoor de sinus en cosinus van het drievoud eens hoeks uit die van den enkelen hoek kunnen berekend worden. Met behulp dezer beide laatste formulen en van de volgende

$$\sin 4a = \sin a \cos 3a + \sin 3a \cos a\,,$$
$$\cos 4a = \cos 3a \cos a - \sin 3a \sin a\,,$$

verkrijgt men na eenige herleiding:

$$\sin 4a = (4 \sin a - 8 \sin^3 a) \cos a\,,$$
$$\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1\,;$$

evenzoo:

$$\sin 5a = 5 \sin a - 20 \sin^3 a + 16 \sin^5 a\,,$$
$$\cos 5a = 16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a\,;$$

en op die wijze voortgaande zou men tot eene algemeene formule zoo voor den sinus als voor den cosinus van het $n$ voud van eenigen hoek kunnen geraken, waaromtrent wij echter, daar zulks meer tot de hoogere deelen der goniometrie behoort, in geene verdere bijzonderheden zullen treden.

Alleenlijk zullen wij hier nog doen opmerken, dat de formulen

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a\,, \qquad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

aanduiden, dat

$$\sin 2a < 2 \sin a\,, \qquad \sin 3a < 3 \sin a\,,$$

en men ook in het algemeen betoogen kan, dat $\sin na < n \sin a$, en dus $< na$, als zijnde $\sin a < a$; zoodat de sinussen van twee verschillende hoeken altijd in eene kleinere rede toenemen dan die hoeken zelven.

Zijn echter de hoeken zeer klein, dan mogen zij nagenoeg als evenredig aan hunne sinussen beschouwd worden. Immers, volgens de grondform. (19) heeft men, $b = (n - 1)\,a$ stellende,

$$\sin na = \sin (n - 1)\,a \cos a + \cos (n - 1)\,a \sin a.$$

Is nu $n\,a$, en dus ook $(n-1)\,a$, even als $a$ een zeer kleine hoek, den kan men, in de vorige vergelijking, zoo wel voor $cos\ a$ als voor $cos\,(n-1)\,a$ de eenheid substitueeren, waardoor zij in dat bijzonder geval overgaat in

$$sin\ n\ a = sin\ (n-1)\ a + sin\ a.$$

Op gelijke wijze heeft men

$$sin\ (n-1)\ a = sin\ (n-2)\ a + sin\ a\,,$$
$$sin\ (n-2)\ a = sin\ (n-3)\ a + sin\ a\,,$$
$$\text{enz.} \qquad \text{enz.}$$

waaruit gemakkelijk te besluiten is,

$$sin\ n\ a = sin\ (n-p)\ a + p\ sin\ a\,,$$

zijnde $p < n$. Stelt men $p = n$, dan komt er

$$sin\ n\ a = n\ sin\ a.$$

Voor een anderen kleiuen hoek $m\,a$, zal evenzoo

$$sin\ m\ a = m\ sin\ a.$$

Derhalve

$$sin\ n\ a : sin\ m\ a = n : m = n\ a : m\ a\,,$$

waardoor het gestelde bewezen is. Van deze laatste eigenschap wordt eene nuttige toepassing gemaakt bij de berekening der sinustafels, zoo als in de volgende § nader zal aangetoond worden.

## § 4.

*Over de samenstelling der gewone- en der logarithmen-sinustafels.*

22. Onder de samenstelling eeuer sinustafel verstaat men het berekenen der goniometrische grootheden voor alle hoeken beneden het kwadrant, en met kleine verschillen opklimmende. De hoogere wiskunde levert onderscheidene reeksen op, waardoor die berekening voor elken hoek van gegevene grootte, spoedig en tot op een groot aantal decimalen, nauwkeurig geschieden kan. Daar echter deze beginselen niet bestemd zijn, om de goniometrie in haren geheelen omvang te behandelen, zoo kunnen wij de bedoelde reeksen hier niet voordragen *), maar zulleu

---

*) Men kan hieromtrent raadplegen LOBATTO: *Lessen over de hoogere Algebra*, 26e *les*, handelende over de ontwikkeling der goniometrische functiën in oneindige reeksen.



ons bepalen met den lezer een algemeen begrip te geven van de wijze om eene sinustafel te ontwerpen, ook zonder het gebruik der hulpmiddelen, die men aan de wiskundigen van lateren tijd verschuldigd is, en eerst gevonden zijn, na dat verre de meeste, naar de oude of sexagesimale verdeeling ingerichte sinustafels reeds ontworpen waren *).

23. In de eerste plaats zal men gemakkelijk inzien, dat de berekening der zijden van de in den cirkel beschreven regelmatige veelhoeken al dadelijk het middel oplevert, om de sinussen en cosinussen van een zeer groot aantal hoeken alleen door worteltrekkingen te berekenen. In de meetkunde †) wordt namelijk geleerd, dat, stellende de zijde van den regelmatigen $n$ hoek $= a$, en die van den regelmatigen $2n$ hoek in denzelfden cirkel beschreven $= a_1$, men, voor den straal 1, zal hebben de vergelijking

$$a_1 = \sqrt{\left\{2 - \sqrt{(4 - a^2)}\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zij nu $\alpha = \frac{180°}{n}$, dan is

$$a = koorde\ 2\,\alpha = 2 \sin \alpha\ ,\ \text{en}\ a_1 = 2 \sin \tfrac{1}{2}\,\alpha\ ,$$

waardoor alzoo uit den sinus van eenigen hoek $\alpha$, de sinus des halven hoeks kan worden berekend, waartoe de formule (1) nog onder dezen vorm zou kunnen gebracht worden:

$$a_1 = \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2}\,a)} - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\,a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

Na hierin $a = 2 \sin \alpha$, en $a_1 = 2 \sin \frac{1}{2}\,\alpha$ gesteld te hebben, verkrijgt men de reeds hiervoren gevonden form. (69) § 3.

$$\sin \tfrac{1}{2}\,\alpha = \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin \alpha)} - \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin \alpha)} \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\text{en} \quad \sin \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welke laatste de voorkeur verdient, ingeval de cosinus van den hoek reeds bekend is.

Daar nu $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ *koorde* $60^0 = \frac{1}{2}$, zal men thans, met behulp van eene der beide laatste formulen, den sinus en cosinus der hoeken van $22^0\ 30'$, en van $15^0$, en hieruit wederom die van $11^0\ 15'$ en van $7^0\ 30'$ enz., door achtereenvolgende worteltrekkingen kunnen berekenen. Verder is de

---

*) Bij het berekenen der tafels van BORDA, CALLET, en van andere op de decimale verdeeling van het kwadrant gegronde sinustafels, heeft men zich echter met veel voordeel van de bedoelde reeksen bediend.

†) Zie VAN GEER: Leerboek der Meetkunde. I, § 20, form. (5).

zijde des ingeschreven vijfhoeks, dat is $2 \sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, dus $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$; op gelijke wijze geeft de zijde des tienhoeks, $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$. Hieruit kunnen nu wederom de sinus en cosinus der hoeken van $9^\circ$, van $4^\circ\,30'$ enz. op gelijke wijze worden afgeleid.

Overigens is het klaar, dat wanneer men eenmaal de goniometrische grootheden der hoeken van $0^\circ$ tot $45^\circ$, op de eene of andere wijze heeft berekend, die voor alle grootere hoeken, tot aan het geheele kwadrant, alsdan insgelijks bekend zijn, vermits

$$\sin(45^\circ + a) = \cos(45^\circ - a) \text{ en } \cos(45^\circ + a) = \sin(45^\circ - a),$$

waarom dan ook de gewone sinustafels zich niet verder dan tot het halve cirkelkwadrant uitstrekken. Het is echter van belang hier te doen opmerken, dat zoodra de berekening tot aan den hoek van $30^\circ$ gevorderd is, de sinussen en cosinussen van alle grootere hoeken tot $45^\circ$, door eene eenvoudige optelling en aftrekking kunnen gevonden worden, en zulks met behulp der form. (64) en (65) § 3, gevende namelijk

$$\sin(30^\circ + a) = \cos a - \sin(30^\circ - a) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
$$\cos(30^\circ + a) = \cos(30^\circ - a) - \sin a \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Gesteld thans dat men voornemens zij de goniometrische lijnen te berekenen van alle hoeken van $0^\circ$ tot $30^\circ$, met $1^\circ$ opklimmende, dan zou men hierbij aldus kunnen te werk gaan.

Uit (3) volgt, door $a = 30^\circ$, en dus $\sin a = \frac{1}{2}$ te stellen,

$$\sin 15^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ en } \cos 15^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Hiervoor is reeds gevonden

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}), \text{ dus } \cos 18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})},$$

en volgens (3)

$$\sin 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$
$$\cos 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

24. De grondformulen

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

geven tevens het middel aan de hand tot berekening van $\sin 3^\circ$ en $\cos 3^\circ$, door namelijk daarin $a = 18^\circ$ en $b = 15^\circ$ te stellen, waardoor men terstond bekomt

$$\sin 3^\circ = \tfrac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5+\sqrt{5})},$$
$$\cos 3^\circ = \tfrac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) + \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$$

Op gelijke wijze verkrijgt men, door $a = 15^{\circ}$ en $b = 9^{\circ}$ te stellen, met behulp der bovenstaande waarden van *sin* 15°, *cos* 15°, *sin* 9° en *cos* 9°, na een lichte herleiding *):

$$\begin{aligned} \sin 6^{\circ} &= -\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})}, \\ \cos 6^{\circ} &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) + \tfrac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}. \end{aligned}$$

En aangezien

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \qquad \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a,$$

zoo vindt men gemakkelijk uit de beide laatst gevondene waarden,

$$\begin{aligned} \sin 12^{\circ} &= \tfrac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{3}), \\ \cos 12^{\circ} &= \tfrac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}(\sqrt{5}-1), \end{aligned}$$

waaruit door dezelfde formulen verder afgeleid wordt

$$\begin{aligned} \sin 24^{\circ} &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) - \tfrac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}, \\ \cos 24^{\circ} &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{5}+1) + \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})}. \end{aligned}$$

De sinussen en cosinussen der bogen van 21° en 27°, laten zich onder anderen berekenen uit de formulen

$$\begin{aligned} \sin(18^{\circ}+a) &= -2\sin 18^{\circ}\cos a - \sin(18^{\circ}-a), \\ \cos(18^{\circ}+a) &= -2\sin 18^{\circ}\sin a + \cos(18^{\circ}-a), \end{aligned}$$

waarin men achtervolgens $a = 3^{\circ}$ en $a = 9^{\circ}$ zal hebben te stellen. In dier voege bekomt men

$$\begin{aligned} \sin 21^{\circ} &= 2\sin 18^{\circ}\cos 3^{\circ} - \sin 15^{\circ}, \\ \cos 21^{\circ} &= \cos 15^{\circ} - 2\sin 18^{\circ}\sin 3^{\circ}, \\ \sin 27^{\circ} &= 2\sin 18^{\circ}\cos 9^{\circ} - \sin 9^{\circ}, \\ \cos 27^{\circ} &= \cos 9^{\circ} - 2\sin 18^{\circ}\sin 9^{\circ}, \end{aligned}$$

of, na substitutie en herleiding,

$$\begin{aligned} \sin 21^{\circ} &= \tfrac{1}{8}(1+\sqrt{3})\sqrt{(5-\sqrt{5})} - \tfrac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(1+\sqrt{5}), \\ \cos 21^{\circ} &= \tfrac{1}{8}(-1+\sqrt{3})\sqrt{(5-\sqrt{5})} + \tfrac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})(1+\sqrt{5}), \\ \sin 27^{\circ} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2}), \\ \cos 27^{\circ} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Aldus zijn wij in staat gesteld de sinussen en cosinussen der hoeken van 0 tot 30°, en dus ook tot 45° (zie form. (5) en (6)) van 3° tot 3°, met den vereischten graad van nauwkeurigheid te berekenen, waaruit vervolgens de overige goniometrische lijnen, met behulp der hiervoor (n°. 13) gevonden betrekkingen af te

---

*) Bij deze berekening zal het gemakkelijker zijn voor *sin* 15° te schrijven de uitdrukking $\tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, en voor *cos* 15°, $\tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$.

leiden zijn. Men zal echter hierbij tevens met vrucht kunnen gebruik maken van de navolgende vergelijkingen

$$tg\,(30^\circ + 2\alpha) = \tfrac{1}{2}\left\{cot\,(30^\circ - \alpha) - tg\,(30^\circ - \alpha)\right\}$$
$$tg\,(45^\circ + \alpha) = cot\,(45^\circ - \alpha) = 2\,tg\,2\alpha + tg\,(45^\circ - \alpha).$$

welke beide uit form. (35) § 3 voortvloeien, door voor $a$ achtervolgens $30^\circ - \alpha$, en $45^\circ - \alpha$ te schrijven, en met wier behulp men de tangenten en cotangenten van alle hoeken grooter dan $30^\circ$, door eene enkele optelling of aftrekking, uit de reeds gevondene zal kunnen berekenen.

Eindelijk zijn nog de uit (38) afgeleide vergelijkingen

$$cosec\,\alpha = cot\,\tfrac{1}{2}\alpha - cot\,\alpha$$
$$sec\,\alpha = cot\,(45 - \tfrac{1}{2}\alpha) - tg\,\alpha\,,$$

bijzonder geschikt tot berekening der secanten en cosecanten, door middel der tangenten en cotangenten.

24. Wat nu betreft de berekening der goniometrische lijnen van kleinere hoeken, zoo als die van $1^\circ$, $1'$ en $1''$, te dien einde kan men verschillende wegen inslaan, waarvan het tot ons oogmerk voldoende zal zijn, den navolgenden aan te wijzen.

Het is namelijk uit de inzage eener figuur terstond op te maken, dat de lengte van den sinus steeds kleiner is dan de boog waartoe hij behoort, en daarentegen de tangens grooter dan die boog is, mits deze laatste kleiner dan een kwadrant zij. In deze onderstelling zal dus altijd

$$\frac{sin\,a}{a} < 1 \quad\text{en}\quad \frac{tg\,a}{a} > 1\,;$$

welke beide verhoudingen echter meer en meer tot de eenheid zullen naderen, naarmate de boog kleiner genomen wordt, zoodat men, bij zeer kleine bogen, deze door hun sinus of tangens zal mogen vervangen, althans wanneer men de getallen-waarden dezer goniometrische lijnen niet tot in een groot aantal decimalen behoeft te kennen. Het valt niet moeilijk na te gaan, in hoe verre het bij de berekening der sinustafels geoorloofd zij, zich van deze laatste onderstelling te bedienen. Te dien einde geeft de vergelijking

$$tg\,a = \frac{sin\,a}{cos\,a} = sin\,a\,(1 - sin^2 a)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

na ontwikkeling van het tweede lid volgens het binomium van Newton:

$$tg\,a = sin\,a + \tfrac{1}{2}\,sin^3\,a + enz.$$

Is nu de boog $a$ klein genoeg om, in de berekening van $tg\,a$, de vijfde en hoogere magten van $sin\,a$ te mogen verwaarloozen, dan heeft men

$$a < tg\,a \text{ of } < sin\,a + \tfrac{1}{2}\,sin^3\,a \quad \text{en tevens } a > sin\,a\,,$$

dus gemiddeld $\qquad a = sin\,a + \frac{1}{4}\,sin^3\,a;$

welke vergelijking weinig van de waarheid zal kunnen afwijken. En hieruit blijkt alzoo, dat men alleen dan den sinus door den boog zelven zal mogen vervangen, bijaldien die boog zoo klein is, dat de term $\frac{1}{4}\,sin^3\,a$ buiten invloed blijft op het laatste van het aantal decimale cijfers, waarin men dezen sinus begeert uit te drukken. Bepaalt men nu dat aantal cijfers op *negen*, dan zal de voormelde term zonder invloed zijn, zoodra de boog $a$, en dus ook $sin\,a < 0{,}0003$.

Men neme bijv. $a = 1'$, dan vindt men

$$boog\;1' = \frac{\pi}{180 \times 60} = 0{,}0002908882\,;\ \text{dus ook}$$
$$sin\;1' = 0{,}000290888.$$

Het verschil zal zich echter eerst in het 12e decimale cijfer openbaren, dewijl men door eene meer strenge berekening vindt

$$sin\;1' = 0{,}00029\ 08882\ 04563$$
$$\text{en } boog\;1' = 000029\ 08882\ 08566.$$

Voor den boog van 1" is het verschil nog veel geringer. Men vindt namelijk

$$sin\;1'' = 0{,}00000\ 48481\ 36809$$
$$\text{en } boog\;1'' = 0{,}00000\ 48481\ 36811\,,$$

zoodat beide grootheden tot in de 13 eerste decimalen volmaakt met elkander overeenstemmen.

Bepaalt men zich nogtans tot acht decimale cijfers, dan zullen de boog, de sinus en de tangens met elkander overeenstemmen, zoo lang $a$ of $sin\,a < 0{,}0015$, vermits alsdan

$$\tfrac{1}{4}\,sin^3\,a < 0{,}0000000008.$$

Daar nu de gewone sinustafelen zich slechts tot 7 decimalen uitstrekken, zoo blijkt uit het voorgaande, dat men, bij de berekening dezer tafels, voor de sinussen en tangenten van alle bogen tot op dien van 5', wiens lengte uitgedrukt wordt door 0,00145444, de lengten dezer bogen zelven zal mogen aannemen.

Heeft men in diervoege eene tafel ontworpen der goniome-

trische grootheden van alle hoeken van 0 tot 5′, dan zullen de sinussen en cosinussen voor alle grootere hoeken tot op dien van 1° gevonden worden, hetzij bij verdubbeling der hoeken, door eene der twee volgende formulen

$$sin\, 2a = 2\, sin\, a\, cos\, a\,, \qquad cos\, 2a = 1 - 2\, sin^2 a\,,$$

hetzij door de meer algemeene formulen

$$sin\,(a + b) = 2 sin\, a\ cos\, b - sin\,(a - b)$$
$$cos\,(a + b) = 2 cos\, a\ cos\, b - cos\,(a - b)\,,$$

van welke laatste men zich, met behulp der reeds hiervoren (n°. 23) gevondene waarden voor de hoeken, die met 3° opklimmen, wederom bedienen kan bij het voortzetten der tafel van 1° tot 1°. Indien men zich voorstelt de tafel zoodanig in te richten, dat zij slechts van 1′ tot 1′ opklimme, zoo als met vele sinustafels het geval is, dan zou men eerstelijk, door eene toepassing der formulen (68) (69) § 3, de tafel nauwkeurig kunnen berekenen voor hoeken, die met 15″ opklimmen, en vervolgens voor de tusschengelegen hoeken gebruik maken van de benaderingsformulen:

$$sin\,(a^0 + 1') = sin\, a + cos\, a\ \ sin\, 1'$$
$$cos\,(a^0 + 1') = cos\, a - sin\, a\ \ sin\, 1'\,,$$

waarin $cos\, 1' = 1$ aangenomen is.

25. Bij de interpolatie der tafel voor kleinere onderdeelen, zal eene eenvoudige berekening van evenredige verschillen voldoende zijn. Want, laten $\delta$, $\delta'$ twee kleine hoeken voorstellen, dan heeft men

$$sin\,(a + \delta) = sin\, a + cos\, a\ \ sin\, \delta$$
$$sin\,(a + \delta') = sin\, a + cos\, a\ \ sin\, \delta'\,,$$

$$\text{dus}\ \frac{sin\,(a + \delta) - sin\, a}{sin\,(a + \delta') - sin\, a} = \frac{sin\, \delta}{sin\, \delta'} = \frac{\delta}{\delta'}\ (\text{n}^0.\, 21)\,;$$

dat is, *de verschillen tusschen de sinussen van hoeken, die slechts weinig van elkander verschillen, zijn nagenoeg evenredig aan de verschillen tusschen die hoeken zelven;* welke eigenschap zich tevens tot al de goniometrische lijnen uitstrekt.

Het voorgaande zal genoegzaam zijn, om zich een volledig denkbeeld te vormen van de wijze waarop het mogelijk is, de getallenwaarden van al de goniometrische grootheden van een willekeurigen hoek in tiendeelige deelen van den straal te bereke-

nen en alzoo eene gewone sinustafel te ontwerpen *). In de Trigonometrie wordt evenwel meer uitsluitend gebruik gemaakt van de logarithmen dezer getallen, ten einde hierdoor de vermenigvuldigingen en deelingen, welke daarmede moeten geschieden, spoediger en gemakkelijker te kunnen verrichten. Uit dien hoofde heeft men dan ook reeds voor lang zoogenaamde logarithmen-sinustafels berekend, waarin naast elken hoek, de logarithmen der onderscheidene tot dien hoek behoorende goniometrische grootheden onmiddellijk worden aangewezen; terwijl in lateren tijd insgelijks zeer nauwkeurige reeksen gevonden zijn, waardoor de logarithmen rechtstreeks kunnen berekend worden. In deze tafels zijn de wijzers der logarithmen van alle goniometrische grootheden, waarvan de getallen-waarden $< 1$, reeds met 10 verhoogd, om hierdoor het gebruik van negatieve wijzers te vermijden.

26. De hier te lande voor nauwkeurige trigonometrische berekeningen, meest gebruikelijke groote logarithmen-sinus-tafels zijn die van Vega, Callet en Schrön. Die van Vega †) bevatten de logarithmen der goniometrische grootheden van 10 tot 10 secunden voor de zes eerste en de zes laatste graden des kwadrants, doch voor de overige graden insgelijks van minuut tot minuut, met bijvoeging nogtans der verschillen voor elke secunde, terwijl behalve die, daarin voor de eerste minuut, de logarithmen der sinussen en tangenten voor elk tiende deel eener secunde aangetroffen worden. In de tafels van Schrön, die wegens hare uitvoerigheid, bijzondere nauwkeurigheid en fraaie uitvoering, de voorkeur boven de overige verdienen, vindt men voor de vijf eerste graden des kwadrants, de logarithmen der sinussen en tangenten van secunde tot secunde, en voor de overige hoeken, van 10 tot 10 secunden opgegeven, met aanwijzing tevens der verschillen voor

---

*) In de meeste tafels komen echter de sinussen en cosinussen als geheele getallen en niet als decimale breuken voor, en zulks uithoofde daarbij de straal niet gelijk aan de eenheid, maar aan het getal $10^n$ gesteld is, zijnde $n$ het aantal cijfers, waarin de decimale breuken uitgedrukt zijn, zoodat hierdoor bij elk dezer getallen het decimaal punt komt te vervallen.

†) Wij bedoelen hier de gewone in 8°, en niet de groote voor het eerst in 1794 in folio uitgegeven tafels van Vega, waarin de logarithmen der sinussen enz. tot in tien decimalen uitgedrukt worden, en wier gebruik alleen bij berekeningen, die een hoogen graad van nauwkeurigheid vorderen, kan te pas komen.

elk tiental secunden, ten einde die logarithmen gemakkelijk te kunnen interpoleeren. Even als in de tafels van VEGA, komen daarin alleen de sinussen, cosinussen, tangenten en cotangenten voor, dewijl $log\ sec\ a = -log\ cos\ a$ en $log\ cosec\ a = -log\ sin\ a$ zijnde, de logarithmen der secanten en cosecanten onmiddellijk te verkrijgen zijn, door slechts het arithmetisch complement te nemen van die der cosinussen en sinussen. Al de logarithmen zijn in de voormelde tafels tot in zeven decimalen uitgedrukt. Voor berekeningen, die eene mindere mate van nauwkeurigheid vorderen, kan men met vijf decimalen volstaan. Hiertoe zijn meer bijzonder ingericht de kleine tafels van LALANDE, STROOTMAN, VAN PESCH en anderen, die voor het dagelijksche gebruik zeer geschikt zijn. Bij zeevaartkundige berekeningen bedient men zich thans van tafels met zes decimalen, waarvan onder anderen zeer bruikbare uitgegeven zijn door BROUWER, in de verzameling van tafels, behoorende bij zijne *Handleiding tot de theoretische en praktische zeevaartkunde.*

27. In de navolgende verklaring van het gebruik der logarithmen-sinustafels, onderstellen wij, dat men van die van SCHRÖN voorzien zij.

Aan het hoofd van elke bladzijde vindt men het aantal graden, en in de beide eerste vertikale kolommen ter rechterzijde, het daarbij behoorende volle aantal minuten, benevens de tientallen van secunden aangewezen. Daar de tafel zich niet verder dan $45^0$ uitstrekt, zoo volgt men voor grootere hoeken, de aanwijzing van het aantal graden aan den voet der bladzijde, zoo mede voor de minuten en secunden, de getallen in de beide laatste vertikale kolommen geplaatst, en die van beneden naar boven opklimmen. Vraagt men nu bijv. de logarithmen der goniometrische grootheden van een hoek van $11^0\ 15'\ 20''$, zoo leest men onmiddellijk in de tafel, op de horizontale rij met het opgegeven aantal minuten en secunden overeenstemmende,

$$\begin{aligned} log\ sin\ 11^0\ 15'\ 20'' &= 9{,}2904474-10 \\ log\ cos\ 11\ \ 15\ \ 20 &= 9{,}9915656-10 \\ log\ tg\ 11\ \ 15\ \ 20 &= 9{,}2988818-10 \\ log\ cot\ 11\ \ 15\ \ 20 &= 0{,}7011182, \\ \text{dus}\quad log\ sec\ 11\ \ 15\ \ 20 &= 0{,}0084344 \\ \text{en}\quad log\ cosec\ 11\ \ 15\ \ 20 &= 0{,}7095526. \end{aligned}$$

De drie kolommen, die achter de logarithmen zijn geplaatst, wijzen de verschillen aan tusschen twee opvolgende logarithmen,

overeenstemmende met 10″ verschil in de hoeken. Zij dienen om daaruit, door eene eenvoudige evenredigheid, de logarithmen der goniometrische grootheden te berekenen voor hoeken, die niet onmiddellijk in de tafels voorkomen. Men zal daarbij opmerken, dat de derde dezer kolommen, gelijktijdig de verschillen voor de logarithmen der tangenten en cotangenten bevat, en zulks uithoofde $\log tg\, a = -\log cot\, a$ zijnde, de eerste juist evenveel moeten toenemen als de laatsten verminderen. Men stelle bijv., dat men den *log sin* van 39° 18′ 12″ begeert te kennen, dan zal men hierbij aldus te werk gaan.

De tafel geeft voor *log sin* 39° 18′ 10″.

9,8016907 met een verschil van 257 voor 10″:

Daar nu voor zeer kleine verschillen in de hoeken, de overeenkomstige verschillen in de logarithmen der goniometrische lijnen nagenoeg aan de eersten evenredig zijn (n°. 25), zoo heeft men de navolgende evenredigheid

$$10'' : 2'' = 257 : x, \text{ dus } x = 51;$$

zijnde de vermeerdering, die de bovenstaande log sinus moet ondergaan, waardoor men bekomt

$$\log sin\, 39^\circ\, 18'\, 12'' = 9{,}8016958 - 10.$$

Deze berekening van de evenredige deelen wordt weder overbodig door de tafeltjes, die men in de laatste kolom vindt, en waaraan men onmiddellijk het verschil voor de enkele secunden en hare onderdeelen kan ontleenen. Bij den logarith. cosinus van eenigen hoek zal men hebben acht te geven om het evenredige verschil af te trekken in plaats van op te tellen, uithoofde de cosinussen verminderen bij het toenemen der hoeken. Dezelfde aanmerking geldt ten aanzien der log. cotangenten.

Men vrage bijv. naar den log cosinus van 40° 12′ 12″, 8.
Volgens de tafel is *log cos* 40° 12′ 10″ 0 = 9,8829596—10.
Verschil voor 10 = 178,
dus voor 2″,8 volgens het tafeltje: 50 afg.
*log cos* 40° 12′ 12″, 8 = 9,8829546—10

Moet men omgekeerd den hoek bepalen behoorende tot een gegeven log sinus of cosinus, dan zoeke men in de tafel, den hoek wiens log sinus of cosinus het naaste bij komt aan den gegevenen, en berekene het verschil tusschen de beide logarithmen, dan zal men, door eene omgekeerde berekening, den gezochten hoek nauwkeurig bepalen. Het zal genoeg zijn hiervan slechts een enkel voorbeeld tot nadere toelichting te geven.

Zij gegeven $\qquad\qquad\qquad \log \sin x = 9{,}5783547$

Men vindt terstond $\quad \log \sin 22^\circ\, 15'\, 20'' = 9{,}5783393$

verschil $= \qquad 154$

Nu bedraagt het logarithmen-verschil voor 10″, 514, gevende voor 154 volgens het tafeltje ongeveer 3″, zoodat de gezochte hoek

$$x = 22^\circ\, 15'\, 23''.$$

Zie hier thans eenige voorbeelden ter oefening in het opzoeken van logarithmen der goniometrische grootheden.

$$\begin{aligned}
\log \sin\ & 75^\circ\, 27'\, 34'',\ 27 = 9{,}9858621 \\
\log \cos\ & 61^\circ\, 51'\ \ 0'',\ 15 = 9{,}6737403 \\
\log tg\ & 27^\circ\, 21'\, 11'',\ 34 = 9{,}7137541 \\
\log \cot\ & 33^\circ\, 22'\, 51'',\ 85 = 0{,}1811775 \\
\log \sin\ & 0^\circ\, 19'\, 25'',\ \ 3 = 5{,}7520063 \\
\log tg\ & 1^\circ\, 24'\, 39'',\ 12 = 8{,}3914512 \\
\log \cot\ & 47^\circ\, 16'\, 24'',\ \ 8 = 9{,}9654972.
\end{aligned}$$

Zijn de hoeken grooter dan 90°, als wanneer eenige der goniom. grootheden negatief worden, dan zal men, daar de logarithmen van negatieve getallen onbestaanbaar zijn, slechts een negatief teeken achter de gevonden logarithmen behoeven te plaatsen, ter aanduiding dat de goniometrische grootheid met zoodanig teeken aangedaan in rekening moet gebracht worden. Wij zullen hiervan later genoegzame voorbeelden aantreffen. De lezer oefene zich thans insgelijks in het bepalen der hoeken behoorende tot de navolgende logarithmen van goniometrische grootheden

$$\begin{aligned}
9{,}1408419 &= \log \sin \\
0{,}4191647 &= \log tg \\
8{,}6170493 &= \log \cos \\
7{,}4935617 &= \log \cot \\
0{,}8426010 &= \log tg.
\end{aligned}$$

## § 5. *)

### *Over de oplossing van goniometrische vergelijkingen.*

28. Bij de toepassing der Algebra op meetkundige vraagstukken, waarin hoeken als onbekenden worden aangenomen, gebeurt

*) Deze en de volgende paragraaf zijn niet noodzakelijk voor het goed begrip der driehoeksmeting, zoodat men zonder bezwaar onmiddellijk tot het tweede hoofdstuk kan overgaan. Voor voortgezette studie der goniometrie en hare toepassing in de hoogere wiskunde moet echter de beoefening dezer paragrafen aanbevolen worden.

(1) De tafels der goniometrische functies kan men ook aanwenden om een gegeven hoek nauwkeurig te meten, dan door middel van een of voorbij gaanden kan; men meet daartoe de straal en absis of ordinaat of beide loodlijnen met behulp van een naauwkeurig verdeelde lineaal; uit de verhouding dezer getallen kan men dan met de tafel den hoek bepalen.
Omgekeerd kan een hoek van een gegeven aantal graden, minuten, seconden, door middel van deze lijnen, wier verhouding in de tafel gegeven wordt, geconstrueerd worden.

---

## Theorema van de Moivre.

De algemeene voorstelling van een complex getal is

$$a \pm bi$$

Stel $a = r \cos \varphi \quad b = r \sin \varphi$

dan is $r^2 = a^2 + b^2 \quad tg\, \varphi = \frac{b}{a}$

dus:

$$a \pm bi = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$$

Deze vorm der complexe getallen is zeer geschikt om producten, quotienten, machten en wortels van hen te bepalen.
Men heeft toch:

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)(\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1) = \cos \varphi \cos \varphi_1 - \sin \varphi \sin \varphi_1 \pm i(\cos \varphi \sin \varphi_1 + \sin \varphi \cos \varphi_1)$$

$$= \cos(\varphi + \varphi_1) \pm i \sin(\varphi + \varphi_1)$$

Dezelfde bewerking herhalende met een derde factor

$$\cos \varphi_2 \pm i \sin \varphi_2$$

zal men vinden:

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)(\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 \pm i \sin \varphi_2) =$$

$$= \cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \pm i \sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2)$$

en bij gelijkstelling der $\varphi$'s voor $n$ factoren:

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$$ ... theorema v. d. Moivre.

Even als het binomium v. Newton geldt dit theorema voor alle waarden van $n$.

1° n is negatief

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi} =$$

$$= \frac{\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi}{1} = \cos(-n)\varphi \pm i\sin(-n)\varphi$$

2° n is een breuk $= \frac{1}{n}$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = ?$$

Men heeft:

$$\left(\cos\frac{1}{n}\varphi \pm i\sin\frac{1}{n}\varphi\right)^n = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

of $\cos\frac{1}{n}\varphi \pm i\sin\frac{1}{n}\varphi = (\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}}$

of $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{1}{n}\varphi \pm i\sin\frac{1}{n}\varphi$

3° n is en breuk $= \frac{p}{q}$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} = \left[(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{q}}\right]^p =$$

$$= \left(\cos\frac{1}{q}\varphi \pm i\sin\frac{1}{q}\varphi\right)^p = \cos\frac{p}{q}\varphi \pm i\sin\frac{p}{q}\varphi$$

Met behulp van dit theorema kan men b.v. de n waarden van $\sqrt[n]{1}$ bepalen.

Men heeft dus

$$\sqrt[n]{(a+bi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Stel $a = 1$ $b = 0$ dan is $r = 1$ $\operatorname{tg}\varphi = 0$
en wel $+0$, dus $\varphi = k.360°$ $k = 0, 1, 2, \dots$

Dus $1 = \cos k.360° + i\sin k.360°$

of $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{k}{n}360° + i\sin\frac{k}{n}360°$

b.v. $\sqrt[5]{1} = \cos\frac{k}{5}360° + i\sin\frac{k}{5}.360°$

Voor $k = 0, 1, 2, 3, 4$ vindt men nu de 5 waarden voor $\sqrt[5]{1}$.
Neemt men $k = 5, 6, \dots$ dan krijgt men dezelfde waarden terug.
Om de $\sqrt[5]{-1}$ te bepalen neemt men $a = -1$ $b = 0$ $\operatorname{tg}\varphi = -0$
$\varphi = (2k-1)180°$ $k = 1, 2, \dots$

het dikwerf, dat men tot eindvergelijkingen geraakt, die met behulp der betrekkingen, tusschen de verschillende goniometrische lijnen bestaande, op eene eenvoudige en sierlijke wijze kunnen opgelost worden. Eenige voorbeelden zullen voldoende zijn om zich met de oplossing dezer soort van vergelijkingen gemeenzaam te maken.

1°. Zij gegeven de vergelijking

$$a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi = c,$$

waarin $\varphi$ den onbekenden hoek, en $a$, $b$, $c$, bekende getallen voorstellen.

Stelt men in die vergelijking voor $\cos^2 \varphi$, de waarde $1 - \sin^2 \varphi$, dan gaat zij over in

$$(a - b) \sin^2 \varphi = c - b,$$

$$\text{of} \quad \sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{c - b}{a - b}},$$

$$\text{en} \quad \cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{a - c}{a - b}}.$$

Men ziet, dat tot de mogelijkheid dezer oplossing vereischt wordt, dat de getallenwaarde van $c$ tusschen die van $a$ en $b$ begrepen zij.

Beide formulen zullen voor den hoek $\varphi$ een oneindig aantal waarden opleveren (n°. 11), waaronder men echter alleen de zoodanige kiest, die met den aard van het vraagstuk overeenstemt.

Bepaalt men zich bij den kleinsten positieven hoek $\varphi$, dan kan men schrijven *)

$$\varphi = Bg \sin \left( \sqrt{\frac{c - b}{a - b}} \right),$$

$$\text{en} \quad \varphi = Bg \cos \left( \sqrt{\frac{a - c}{a - b}} \right).$$

2°. Zij gegeven

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = c.$$

Zoo men in deze vergelijking $\sin \varphi$ of $\cos \varphi$ afzondert, en ver-

---

*) In de vergelijking $\sin \varphi = \alpha$, beteekent de onbekende $\varphi$, den boog wiens sinus gelijk aan $\alpha$ is; welke betrekking men gewoon is, aldus te schrijven $\varphi = Bg \sin \varphi$.

Op gelijke wijze volgt uit de vergelijkingen

$$\cos \varphi = \beta, \qquad tg\, \varphi = \gamma,$$
$$\varphi = Bg \cos \beta, \qquad \varphi = Bg \tang \gamma \text{ enz.}$$

Zoodanige uitdrukkingen hebben den naam verkregen van *cyclometrische* grootheden.

volgens voor $\cos\varphi$ of $\sin\varphi$, zijne waarde $\sqrt{(1-\sin^2\varphi)}$ of $\sqrt{(1-\cos^2\varphi)}$ schrijft, dan is het duidelijk, dat hieruit eene tweede machtsvergelijking zal ontstaan. De goniometrie geeft echter een eenvoudig middel aan de hand, om de oplossing van zoodanige vergelijkingen, en de daaruit voortvloeiende worteltrekkingen, geheel te vermijden. Men deele namelijk de gegevene vergelijking door $a$, en stelle vervolgens de breuk $\frac{a}{b}$ gelijk aan den tangens van eenigen hulphoek $\alpha$, hetgeen ingevolge de 4e opmerking van n°. 12 altijd mag geschieden, en die, daar $b$ en $a$ bekende getallen zijn, door middel der logarithmen, gemakkelijk in de log sinus-tafels op te zoeken is. Men heeft alzoo

$$tg\,\alpha = \frac{b}{a}, \text{ en } \sin\varphi + tg\,\alpha\cos\varphi = \frac{c}{a},$$

of
$$\sin\varphi\cos\alpha + \sin\alpha\cos\varphi = \frac{c}{a}\cos\alpha,$$

dat is
$$\sin(\varphi+\alpha) = \frac{c}{a}\cos a,$$

dus
$$\varphi + \alpha = Bg\sin\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right),$$

waardoor de onbekende $\varphi$ berekend kan worden. De tweede waarde van $\varphi$ vindt men door op te merken, dat ook

$$\varphi + \alpha = 180^\circ - Bg\sin\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right),$$

omdat hieruit voor $\sin(\varphi+\alpha)$ dezelfde waarde voortvloeit.

Men heeft dus voor de beide waarden van den onbekenden hoek:

$$\varphi = -\alpha + Bg\sin\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right)$$

$$\text{en} \quad \varphi = 180^\circ - \alpha - Bg\sin\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right).$$

Had men de gegevene vergelijking door $b$ gedeeld, en $\frac{a}{b} = tg\,\alpha$ gesteld, dan zou men op gelijke wijze voor de beide waarden van $\varphi$ gevonden hebben,

$$\varphi = \alpha \pm Bg\cos\left(\frac{c}{b}\cos\alpha\right).$$

Uit de eerste oplossing volgt als voorwaarde van bestaanbaarheid dat $c\cos a < a$ of $c < a\sec\alpha$ zij. Nu is $a\,tg\,\alpha = b$. Derhalve moet $c < \sqrt{(a^2+b^2)}$ zijn; welke voorwaarde op gelijke wijze uit de tweede oplossing af te leiden is.

(·) [illegible] substitution $\operatorname{Cot}\varphi = \frac{1}{5\varphi}$ is [illegible]

3°. De vergelijking zij:

$$a\, tg\, \varphi + b\, cot\, \varphi = c.$$

Men ziet terstond dat zij, door voor $cot\, \varphi$ te schrijven $\frac{1}{tg\, \varphi}$, tot eene tweede machtsvergelijking opklimt, die echter aldus kan vermeden worden. Volgens (37) en (38) § 3, gaat zij namelijk over in

$$a\left(\frac{1 - cos\, \varphi}{sin\, 2\varphi}\right) + b\left(\frac{1 + cos\, 2\varphi}{sin\, 2\varphi}\right) = c\,;$$

of, na herleiding in

$$sin\, 2\varphi + \left(\frac{a-b}{c}\right) cos\, 2\varphi = \frac{a+b}{c},$$

welke vergelijking op gelijke wijze als die van het 2e voorbeeld kan worden behandeld. Men stelle alzoo

$$\frac{a-b}{c} = cot\, \alpha\,, \text{ of } \frac{c}{a-b} = tg\, \alpha\,,$$

dan vindt men $\quad cos\,(2\varphi - \alpha) = \frac{a+b}{c} sin\, \alpha\,,$

dus $\quad 2\varphi = \alpha \pm Bg\, cos\left(\frac{a+b}{c} sin\, \alpha\right),$

waardoor de beide waarden van $\varphi$ te berekenen zijn. Tot hare bestaanbaarheid wordt gevorderd, dat

$$(a+b)\, sin\, \alpha < c \text{ of } \frac{c}{sin\, \alpha} > a + b \text{ zij.}$$

Maar uit $\quad cot\, \alpha = \frac{a-b}{c}$, volgt $\frac{c^2}{sin^2\, \alpha} = c^2 + (a-b)^2$,

dus $\quad c^2 + (a-b)^2 > (a+b)^2$, of $c^2 > 4\, ab$.

4°. De vergelijking zij

$$cos\, \varphi\, cos\, (\varphi - a) = m.$$

Men verandere haar, met behulp der form. (56) § 3, in de volgende

$$cos\, (2\, \varphi - \alpha) + cos\, \alpha = 2m$$

dus $\quad cos\, (2\, \varphi - \alpha) = 2m - cos\, \alpha\,;$

en aangezien elke cosinus zoo wel tot een positieven als tot een negatieven hoek van gelijke grootte behoort, zoo heeft men

$$2\varphi = \alpha \pm Bg\, cos.(2m - cos\, \alpha),$$

die twee verschillende waarden van $\varphi$ zal doen kennen.

Tot de bestaanbaarheid der waarden van den hoek $\varphi$ wordt blijkbaar gevorderd, dat $2m - cos\, \alpha < 1$, of $1 + cos\, \alpha > 2m$, of $cos\, \frac{1}{2}\, \alpha > \sqrt{m}$ zij.

5°. Zij gegeven de vergelijking

$$\sin\varphi \sin(\varphi - \alpha) = a \cos^2 \varphi,$$

die, op de gewone wijze behandeld, insgelijks tot eene vierkantsvergelijking leidt. Men verandere haar op grond der form. (55) en (33) § 3, in

$$\cos\alpha - \cos(2\varphi - \alpha) = 2a \cos^2\varphi = a(1 + \cos 2\varphi),$$

of na ontwikkeling, in deze

$$(a + \cos\alpha)\cos 2\varphi + \sin\alpha \sin 2\varphi = \cos\alpha - a.$$

Zij $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + a} = tg\,\beta$, dan komt er

$$\cos(2\varphi - \beta) = \left(\frac{\cos\alpha - a}{\cos\alpha + a}\right)\cos\beta.$$

Men stelle nog $a \sec\alpha = tg\,p$ of $a = tg\,p \cos\alpha$,
dan geeft de laatste vergelijking, lettende op form (46) § 3,

$$\cos(2\varphi - \beta) = \left(\frac{1 - tg\,p}{1 + tg\,p}\right)\cos\beta = tg\,(45^\circ - p)\cos\beta.$$

Derhalve $2\varphi = \beta \pm Bg\cos\,(tg\,(45^\circ - p)\cos\beta)$.
welke uitdrukking, zoolang $\alpha < 90^\circ$, voor den hoek $\varphi$ altijd twee bestaanbare waarden zal opleveren.

6°. Zij gegeven de vergelijking

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} = 1,$$

of $\sin(\alpha + \varphi)\sin(\alpha - \varphi) + \sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi\sin(\alpha - \varphi)$,
dat is, ingevolge (55) § 3:

$$\cos 2\varphi - \cos 2\alpha + \sin 2\varphi = \cos(\alpha - 2\varphi) - \cos\alpha$$
$$= \cos\alpha\cos 2\varphi + \sin\alpha\sin 2\varphi - \cos\alpha,$$

waaruit verder volgt,

$$(1 - \sin\alpha)\sin 2\varphi + (1 - \cos\alpha)\cos 2\varphi = \cos 2\alpha - \cos\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = (2\cos\alpha + 1)(\cos\alpha - 1).$$

Zij nu $\frac{1 - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = tg\,\beta$,

dan komt er, na de vergelijking door $1 - \cos\alpha$ gedeeld te hebben,

$$\cos(2\varphi - \beta) = -(1 + 2\cos\alpha)\cos\beta,$$

dus $2\varphi = \beta \pm \{180^\circ - Bg\cos\,(1 + 2\cos\alpha)\cos\beta\}$.

7°. *Uit de vergelijking*

$$Bg\,cos\,\frac{1-x}{2} - Bg\,cos\,\frac{1+x}{2} = 2p,$$

*vraagt men x op te lossen.*

Men kan stellen

$$Bg\,cos\,\frac{1-x}{2} = y+p, \quad Bg\,cos\,\frac{1+x}{2} = y-p,$$

waarin $y$ eene nieuwe onbekende is. De laatste vergelijkingen geven:

$$\frac{1-x}{2} = cos\,(y+p) = cos\,y\,cos\,p - sin\,y\,sin\,p,$$

$$\frac{1+x}{2} = cos\,(y-p) = cos\,y\,cos\,p + sin\,y\,sin\,p,$$

en hieruit door optelling en aftrekking:

$$1 = 2\,cos\,y\,cos\,p,$$
$$x = 2\,sin\,y\,sin\,p,$$

of

$$cos\,y = \frac{1}{2\,cos\,p}, \quad sin\,y = \frac{x}{2\,sin\,p};$$

neemt men de som der vierkanten van deze vergelijkingen, dan volgt,

$$1 = \frac{1}{4\,cos^2 p} + \frac{x^2}{4\,sin^2 p}$$

of

$$x^2 = 4\,sin^2 p\left(1 - \frac{1}{4\,cos^2 p}\right)$$
$$= \frac{sin^2 p}{cos^2 p}(4\,cos^2 p - 1)$$
$$= \frac{sin^2 p}{cos^2 p}(3 - 4\,sin^2 p)$$
$$= \frac{sin\,p}{cos^2 p}(3\,sin\,p - 4\,sin^3 p)$$

Derhalve, ingevolge form. (85) § 3,

$$x = \frac{\sqrt{(sin\,p\,sin\,3p)}}{cos\,p}.$$

Onder de goniometrische vergelijkingen treft men er dikwerf eenige aan, die, hoewel schijnbaar eenvoudig, nogtans tot eene vierde of hoogere machtsvergelijking leiden, wier oplossing alleen door eene der bekende benaderings-leerwijzen kan geschieden. Tot een voorbeeld hiervan strekke de vergelijking

$$a\,sin\,\varphi + b\,tg\,\varphi = c,$$

die aldus zal dienen behandeld te worden. Men heeft terstond

$$b\, tg\, \varphi = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)}} = c - a \sin \varphi ,$$

dus $b^2 \sin^2 \varphi = (1 - \sin^2 \varphi) \{ c^2 - 2ac \sin \varphi + a^2 \sin^2 \varphi \}$,

waaruit, na ontwikkeling en herleiding, volgt

$$a^2 \sin^4 \varphi - 2ac \sin^3 \varphi + (b^2 + c^2 - a^2) \sin^2 \varphi + 2ac \sin \varphi - c^2 = 0;$$

welke vierde machtsvergelijking, door $\frac{c}{a} = m$ en $\frac{b}{a} = n$ te stellen, overgaat in

$$\sin^4 \varphi - 2m \sin^3 \varphi + (m^2 + n^2 - 1) \sin^2 \varphi + 2m \sin \varphi - m^2 = 0.$$

Op gelijke wijze zal men uit de vergelijking

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = a \cos^2 \varphi ,$$

door voor $\sin \varphi$ te schrijven $\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)}$, afleiden

$$a^2 \cos^4 \varphi - 2ab \cos^3 \varphi + (a^2 + b^2) \cos^2 \varphi - a^2 = 0 ,$$

of, wanneer wij $\frac{b}{a} = m$ stellen,

$$\cos^4 \varphi - 2m \cos^3 \varphi + (m^2 + 1) \cos^2 \varphi - 1 = 0.$$

Men kan zich thans hierin verder oefenen door de oplossing der navolgende goniometrische vergelijkingen.

I. $a \sin (\varphi + \alpha) + b \sin (\varphi + \beta) = c$
II. $a \sin (\varphi + \alpha) + b \cos (\varphi + \beta) + c \sin \varphi = 0$
III. $\cos (\varphi + \alpha) \cos (\varphi + \beta) = a$
IV. $a \sin \varphi + b \sin 2\varphi = c$
V. $a \sin \varphi + b \cos 2\varphi = c$
VI. $a \cos \varphi + b\, tg\, \varphi = c$
VII. $\sin \varphi - \cos \varphi = 4 \cos^2 \varphi \sin \varphi$.

## § 6.

*Over het gebruik der sinustafels bij de herleiding en oplossing van vergelijkingen van den eersten, tweeden en derden graad.*

29. In de cijferkunde wordt geleerd hoe samengestelde getallenuitdrukkingen voor de berekening met logarithmen geschikt of, zoo als men het wel noemt, *logarithmisch* gemaakt worden. Door toepassing van de goniometrische tafels kan men dat logarithmisch maken zeer bevorderen en daarom zijn deze tafels onmisbaar voor

elk, die groote getallenberekeningen te verrichten heeft. Enkele en daaronder eenige voorname toepassingen laten wij als voorbeeld volgen.

Zij in de eerste plaats gevraagd de uitdrukking

$$x = A + B$$

logarithmisch te maken, dat wil hier zeggen, zoodanig om te zetten, dat men om de waarde van $x$ te berekenen, niet van de getallenwaarde der grootheden A en B, die beide *positief* ondersteld worden, doch alleen van hare logarithmen gebruik behoeft te maken. Daartoe brengen wij haar in den vorm

$$x = A \cdot \left(1 + \frac{B}{A}\right)$$

en nemen nu een hulphoek $\alpha$ aan, die bepaald wordt door

$$tang^2\, \alpha = \frac{B}{A},$$

hetgeen altijd kan geschieden, omdat de tangens dus ook zijn vierkant alle mogelijke positieve waarden kan aannemen. Hierdoor wordt

$$x = A\,(1 + tang^2\, \alpha) = \frac{A}{cos^2\, \alpha},$$

en hiermede is het doel bereikt, want de waarde van $x$ wordt nu gevonden door het volgende schema

$$\left.\begin{array}{l} log\, tang\, \alpha = \frac{1}{2}\,(log\, B - log\, A) \\ log\, x = log\, A - 2\, log\, cos\, \alpha, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

hierin toch komen A en B alleen door hare logarithmen voor.

Is eene der beide grootheden negatief, dus

$$x = A - B,$$

dan kan men aannemen, dat $A > B$, want mocht $A < B$, dan kan men schrijven

$$x = -(B - A)$$

en het zou door $x$ negatief te nemen en A met B te verwisselen, op hetzelfde neêr komen.

Schrijft men nu

$$x = A\left(1 - \frac{B}{A}\right)$$

en stelt

$$\frac{B}{A} = sin^2\, \alpha,$$

hetgeen kan geschieden, omdat $\frac{B}{A}$ eene gewone breuk is, dan wordt

$$x = A(1 - \sin^2 \alpha) = A \cos^2 \alpha.$$

Derhalve heeft men nu het volgende schema

$$\left.\begin{array}{l} \log \sin \alpha = \frac{1}{2}(\log B - \log A) \\ \log x = \log A + 2 \log \cos \alpha \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Het zal later zoowel bij de rechtlijnige als bolvormige driehoeksmeting blijken, van welk groot nut en uitgestrekte toepassing deze herleiding is.

Zij in de tweede plaats te herleiden de uitdrukking

$$x = m\left(\frac{a - b}{a + b}\right),$$

dan schrijft men haar in den vorm

$$x = m\left(\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}\right)$$

en stelt de breuk

$$\frac{b}{a} = \tang \alpha.$$

Hierdoor wordt, lettende op form. (46) § 3,

$$x = m\left(\frac{1 - \tang \alpha}{1 + \tang \alpha}\right) = m \tang (45^0 - \alpha),$$

zoodat $x$ bekend is, zoodra men den hoek $\alpha$ uit de sinus tafelgevonden heeft.

Is $a > b$, dan wordt $\tang \alpha < 1$, derhalve $\alpha < 45^0$, zoodat $\alpha$ positief wordt; voor $a < b$ is $\alpha > 45^0$, dus $x$ negatief, hetgeen met de oorspronkelijke uitdrukking overeenkomt.

Is $\qquad x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ of $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

dan stelt men in het eerste geval

$$b = a \sin \alpha \text{ of } \sin \alpha = \frac{b}{a},$$

en in het tweede, $\quad b = a \, tg \, \alpha \quad$ of $\quad tg \, \alpha = \frac{b}{a}$.

Hierdoor vindt men achtervolgens

$$x = a \cos \alpha \text{ en } x = a \sec \alpha,$$

zonder dat hierbij eenige worteltrekking gevorderd wordt.

Heeft men de vergelijking

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

dan stelle men $b=a\,tg\,\alpha$ of $tg\,\alpha=\frac{b}{a}$,

waardoor zij overgaat in (form. (43) § 3)

$$x=\frac{1-tg^2\,\alpha}{1+tg^2\,\alpha}=\cos 2\alpha.$$

Zij $x=\sqrt{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)}$,

zoo stelle men $n=m\cos\alpha$ of $\cos\alpha=\frac{n}{m}$,

dan wordt $x=\sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)}=tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha$, volgens form. (36).

Heeft men de vergelijking

$$x=\sqrt{\left(\frac{a\sin\alpha-b\cos\alpha}{a\sin\alpha+b\cos\alpha}\right)},$$

dan vindt men eveneens, door $\frac{b}{a}\cot\alpha=\cos\beta$ te stellen,

$$x=tg\,\tfrac{1}{2}\,\beta.$$

30. De vergelijking

$$\sqrt{(a+bx)}+\sqrt{(a-bx)}=c$$

kan aldus opgelost worden. Men stelle

$$bx=a\sin\varphi \text{ of } x=\frac{a\sin\varphi}{b}.$$

Hierdoor verandert zij in

$$\sqrt{a(1+\sin\varphi)}+\sqrt{a(1-\sin\varphi)}=c,$$

of, volgens form. (68) § 3,

$$2\sqrt{a}\,.\cos\tfrac{1}{2}\,\varphi=c \text{ dus } \cos\tfrac{1}{2}\,\varphi=\frac{c}{2a}\sqrt{2}.$$

De hoek $\varphi$ op deze wijze bekend zijnde, zoo vindt men vervolgens $x$ door de vergelijking

$$x=\frac{a}{b}\sin\varphi,$$

waarin $\varphi$ zoo wel positief als negatief kan genomen worden.

Zij gegeven de vergelijking

$$\frac{\sqrt{(a+bx)}-\sqrt{(a-bx)}}{\sqrt{(a+bx)}+\sqrt{(a-bx)}}=c.$$

Dezelfde substitutie als voren geeft onmiddellijk

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\varphi=c \text{ en } x=\frac{a}{b}\sin\varphi.$$

Laat gegeven zijn de vergelijking

$$x\sqrt{(a - bx^2)} = c.$$

Men stelle
$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} . \sin\varphi ,$$

dan wordt zij

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \sin\varphi \cos\varphi = c\text{, dus } \sin 2\varphi = \frac{2c\sqrt{b}}{a},$$

waaruit voor $\varphi$ twee verschillende waarden ontstaan, waarvan de eene het complement der andere is.

De twee van elkander in grootte verschillende wortels der opgegeven vergelijking zijn alzoo

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} . \sin\varphi\text{, en } x' = \sqrt{\frac{a}{b}} . \cos\varphi.$$

Heeft men de vergelijkingen

$$ax + \frac{a}{x} = b\text{, } ax - \frac{a}{x} = b,$$

op te lossen, dan zal men, $x = tg\,\varphi$ stellende, ingevolge de form. (41) en (42) § 3, de eerste doen overgaan in

$$cosec\, 2\varphi = \frac{b}{2a} \text{ of } \sin 2\varphi = \frac{2a}{b},$$

en de tweede, door $x = cot\,\varphi$ te stellen, in

$$cot\, 2\varphi = \frac{b}{2a} \text{ of } tg\, 2\varphi = \frac{2a}{b},$$

waardoor in elke der gegeven vergelijkingen, de beide waarden van $x$ bekend worden, vermits men, in het eerste geval, $2\varphi$ ook door $180^\circ - 2\varphi$, en dus $tg\,\varphi$ door $cot\,\varphi$ vervangen mag, terwijl men, in het tweede geval, voor $2\varphi$ ook $180^\circ + 2\varphi$ kunnende schrijven, hierdoor $x = cot\,(90^\circ + \varphi) = - tg\,\varphi$ bekomt.

31. Alle vergelijkingen van den tweeden graad zijn voor eene goniometrische oplossing vatbaar.

Beschouwen wij namelijk de algemeene vergelijking

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

waarin de derde term $C$ positief ondersteld wordt.

Men stelle in de eerste plaats

$$x = y\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Hierdoor verandert zij in

$$Cy^2 + B\sqrt{\frac{C}{A}} . y + C = 0$$

of, na door $Cy$ gedeeld te hebben,

$$y + \frac{1}{y} = -\frac{B}{\sqrt{AC}}.$$

Zij nu wederom $y = tg\,\varphi$, dan komt er, volgens (41) § 3,

$$\sin 2\varphi = \frac{-2\sqrt{AC}}{B},$$

terwijl de beide wortels zijn

$$x = \sqrt{\frac{C}{A}}\,.\,tg\,\varphi, \quad x' = \sqrt{\frac{C}{A}}\,\cot\varphi,$$

welke beide negatief zullen zijn, indien $B$ positief is.

Tot de bestaanbaarheid van den hoek $\varphi$ wordt blijkbaar gevorderd, dat $\frac{2\sqrt{AC}}{B} < 1$ of $B^2 > 4AC$, hetgeen met de gewone wijze van oplossen der gegevene tweede machtsvergelijking overeenstemt.

Voor het geval waarin de term $C$ negatief is, komt men door dezelfde substitutie tot

$$y - \frac{1}{y} = -\frac{B}{\sqrt{AC}},$$

en $y = tg\,\varphi$ stellende, vindt men, volgens (42) § 3,

$$tg\,2\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}.$$

De beide wortels zijn alsdan

$$x = \sqrt{\frac{C}{A}}\,.\,tg\,\varphi, \quad \text{en} \quad x' = -\sqrt{\frac{C}{A}}\,.\cot\varphi.$$

Zie hier nog eene derde oplossings-wijze, welke zoo wel voor positieve als negatieve waarden van $C$ geldig is.

In de onderstelling dat de wortels bestaanbaar zijn, kan men hunne getallenwaarden altijd door $tg\,\varphi$ en $tg\,\varphi'$ uitdrukken. Men heeft derhalve, volgens eene hoofdeigenschap der vierkantsvergelijkingen,

$$tg\,\varphi + tg\,\varphi' = \frac{-B}{A}, \qquad tg\,\varphi\,tg\,\varphi' = \frac{C}{A},$$

waaruit terstond volgt

$$tg\,(\varphi + \varphi') = \frac{tg\,\varphi + tg\,\varphi'}{1 - tg\,\varphi\;tg\,\varphi'} = \frac{-B}{A-C} = \frac{B}{C-A},$$

verder heeft men op grond der betrekking

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} = \frac{1 + tg\,\varphi\,tg\,\varphi'}{tg\,\varphi + tg\,\varphi'},$$

$$\cos(\varphi - \varphi') = -\left(\frac{A+C}{B}\right) \sin(\varphi + \varphi').$$

Hierdoor worden $(\varphi + \varphi')$ en $(\varphi - \varphi')$, en dus ook $\varphi$ en $\varphi'$ bekend, waaruit vervolgens $tg\,\varphi$ en $tg\,\varphi'$ kunnen worden berekend.

In het geval van onbestaanbaarheid der wortels kan men aldus te werk gaan. Zij $\frac{B}{A} = a$; $\frac{C}{A} = b$, dan wordt de vergelijking

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Men stelle voor de beide wortels

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{en} \quad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

dan heeft men $\quad 2\alpha = a \quad$ en $\quad \alpha^2 + \beta^2 = b.$

Zij $\quad \alpha = \sqrt{b}\,.\sin\varphi \quad$ en $\quad \beta = \sqrt{b}\,.\cos\varphi,$

dan is $\quad 2\sqrt{b}\,.\sin\varphi = a$, dus $\sin\varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}}$,

waardoor de hoek $\varphi$ bekend is. Voor de wortels heeft men vervolgens

$$\sqrt{b}\left\{\sin\varphi + \sqrt{-1}\,.\cos\varphi\right\} \quad \text{en} \quad \sqrt{b}\left\{\sin\varphi - \sqrt{-1}\,.\cos\varphi\right\},$$

waarin voor $a$ en $b$ hunne voorgaande waarden kunnen gesubstitueerd worden.

Zie hier nog een voorbeeld van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Gegeven zijnde $\quad x\sqrt{(a-by^2)} + y\sqrt{(a-bx^2)} = c$

$\quad x\sqrt{(a-by^2)} - y\sqrt{(a-bx^2)} = c',$

zoo stelle men $x = \sqrt{\frac{a}{b}}\,.\sin\varphi$ en $y = \sqrt{\frac{a}{b}}\,.\sin\varphi'$.

Hierdoor gaat de eerste vergelijking over in

$$\frac{a}{\sqrt{b}}\left\{\text{siu}\,\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi\right\} = c$$

$$\text{of} \quad \sin(\varphi + \varphi') = \frac{c}{a}\sqrt{b}.$$

Op dezelfde wijze besluit men uit de tweede vergelijking,

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{c'}{a}\sqrt{b},$$

$$\text{dus} \quad \varphi + \varphi' = Bg\sin\left(\frac{c}{a}\sqrt{b}\right)$$

$$\text{en} \quad \varphi - \varphi' = Bg\sin\left(\frac{c'}{a}\sqrt{b}\right),$$

waardoor de hoeken $\varphi$, $\varphi'$, en dus ook de waarden van $x$ en $y$ gemakkelijk te berekenen zijn.

Men zal opmerken dat elke dezer beide onbekenden slechts

ééne waarde kan hebben. Immers, nemende voor $\varphi + \varphi'$ en $\varphi - \varphi'$ hunne supplementen, dan zal $\varphi$ insgelijks in zijn supplement overgaan, doch $\varphi'$ zijne waarde behouden, waardoor $\sin\varphi$ en $\sin\varphi'$, en dus ook $x$ en $y$ onveranderd blijven.

32. Tot eene der fraaiste toepassingen, welke men in lateren tijd van de goniometrische vormen gemaakt heeft, behoort ongetwijfeld haar gebruik bij de óplossing van derdemachts-vergelijkingen, waarin de tweede term ontbreekt, inzonderheid in het geval, waarin alle drie wortels bestaanbaar zijn, en dat, bij toepassing van den regel van Cardanus, zoo als bekend is, tot het zoogenaamde *onherleidbare geval* aanleiding geeft. Wij gaan thans tot de verklaring dezer handelwijze over.

Zij de vergelijking

$$x^3 - ax + b = 0,$$

waarin de coëfficiënt $a$ positief, of de tweede term negatief, en daarenboven

$$(\tfrac{1}{2} b)^2 < (\tfrac{1}{3} a)^3 \text{ of } 27\, b^2 < 4\, a^3$$

ondersteld wordt, aan welke voorwaarden de getallen $a$ en $b$ moeten voldoen, zal de vergelijking drie bestaanbare wortels kunnen opleveren.

Men stelle nu $x = my$, dan heeft men

$$y^3 - \frac{a}{m^2} y + \frac{b}{m^3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Maar uit form. (85) § 3, volgt

$$\sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0.$$

De termen der laatste vergelijking met die der vorige ($\alpha$) vergelijkende, zoo blijkt hieruit, dat, indien men den coëfficiënt $m$ zoodanig bepaalt, dat

$$\frac{a}{m^2} = \frac{3}{4} \quad \text{of} \quad m = \sqrt{\frac{4a}{3}} = 2\sqrt{\frac{a}{3}},$$

en vervolgens

$$\frac{4b}{m^3} = \sin 3\varphi$$

stelt, alsdan $y = \sin\varphi$, en dus $x = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \,.\, \sin\varphi$ wordt; zijnde

$$\varphi = \tfrac{1}{3}\, Bg \sin\left(\frac{4b}{m^3}\right) = \tfrac{1}{3}\, Bg \sin\left(\frac{3b}{2a\sqrt{\frac{1}{3}a}}\right);$$

welke uitdrukking altijd eene bestaanbare waarde voor den hoek $\varphi$ zal opleveren, aangezien uit de aangenomen onderstelling

$$\frac{b^2}{4} < \frac{a^3}{27},$$

*

noodzakelijk volgt,

$$\frac{b}{2} < \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \quad \text{of} \quad 3b < 2a\sqrt{\tfrac{1}{3}a},$$

en dus $$\sin 3\varphi < 1.$$

Om nu daaruit tevens de beide overige bestaanbare wortels $x'$, $x''$ af te leiden, merke men op, dat in de vergelijking

$$\frac{4b}{m^3} = \sin 3\varphi \quad \text{of} \quad 3\varphi = Bg\,\sin\left(\frac{4b}{m^3}\right)$$

voor den hoek $3\varphi$, insgelijks kan geschreven worden $\pi - 3\varphi$ en $-(\pi + 3\varphi)$, zoodat men behalve den hoek $\varphi$ nog twee andere hoeken $60^0 - \varphi$ en $-(60^0 + \varphi)$ bekomt, waardoor

$$x' = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}a}\,.\,\sin(60^0 - \varphi) \text{ en } x'' = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}a}\,.\,\sin(60^0 + \varphi).$$

Had men voor den hoek $3\varphi$ geschreven $2\pi + 3\varphi$ en $4\pi + 3\varphi$, waardoor de beide hoeken $\varphi$ zouden overgaan in $120^0 + \varphi$ en $240^0 + \varphi$, dan zoude men, aangezien

$$\sin(120^0 + \varphi) = \sin(60^0 - \varphi)$$
$$\sin(240^0 + \varphi) = -\sin(60^0 - \varphi)$$

voor $x'$ en $x''$ blijkbaar dezelfde uitkomsten als voren verkregen hebben.

Wellicht zou men kunnen denken, dat er voor $3\varphi$ andere hoeken te nemen zijn, waaruit voor $\sin\varphi$, en dus voor $x$, nieuwe waarden, van de voorgaande verschillende, zouden af te leiden zijn. Doch het is gemakkelijk zich van het tegendeel te overtuigen. Immers, schrijvende voor $3\varphi$ de opklimmende reeksen van hoeken

$$\pi - 3\varphi,\ 3\pi - 3\varphi,\ 5\pi - 3\varphi,\ 7\pi - 3\varphi \text{ enz. } (2n + 1)\pi - 3\varphi,$$
$$2\pi + 3\varphi,\ 4\pi + 3\varphi,\ 6\pi - 3\varphi,\ 8\pi + 3\varphi \text{ enz. } 2n\pi + 3\varphi,$$

die alle voor $\sin 3\varphi$ dezelfde waarde opleveren, dan ziet men terstond in, dat zoodra $n = 3$ of eenig veelvoud van 3 wordt, $\varphi$ met $2\pi$ toeneemt, en dus $\sin\varphi$ zijne waarde behoudt. Er blijven dus van elke reeks slechts de drie eerste termen ter beschouwing over.

Nu is $$\sin\left(\frac{3\pi - 3\varphi}{3}\right) = \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi,$$

$$\sin\left(\frac{5\pi - 3\varphi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3} - \varphi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right),$$

$$\sin\left(\frac{2\pi + 3\varphi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right),$$

$$\sin\left(\frac{4\pi + 3\varphi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right),$$

$$\sin\left(\frac{6\pi + 3\varphi}{3}\right) = \sin(2\pi + \varphi) = \sin\varphi,$$

waaruit blijkt, dat men steeds dezelfde waarden voor $x$ terug bekomt.

De oplossing der cubische vergelijking

$$x^3 - ax + b = 0$$

geschiedt dus, in het onherleidbaar geval, door middel van het volgende stelsel formulen

$$m = 2\sqrt{\frac{a}{3}},$$

$$\varphi = \tfrac{1}{3}\, Bg\, sin\left(\frac{4b}{m^3}\right),$$

$$x = \quad m\, sin\, \varphi,$$

$$x' = \quad m\, sin\,(60^0 - \varphi),$$

$$x'' = -m\, sin\,(60^0 + \varphi);$$

die met behulp der logarithmen gemakkelijk te berekenen zijn *)

33. Men had de oplossing der gegevene vergelijking insgelijks kunnen afleiden uit de vergelijking

$$cos^3\, \varphi - \tfrac{3}{4}\, cos\, \varphi - \tfrac{1}{4}\, cos\, 3\,\varphi = 0,$$

voortvloeiende uit (86) § 3, en zoude alsdan het navolgende stelsel formulen verkregen hebben.

$$\varphi = \tfrac{1}{3}\, Bg\, cos\left(\frac{-4b}{m^3}\right),$$

$$x' = m\, cos\, \varphi,$$

$$x' = m\, cos\,(120^0 - \varphi) = -sin\,(30^0 - \varphi),$$

$$x'' = m\, cos\,(120^0 + \varphi) = -sin\,(30^0 + \varphi).$$

Om de voorgaande wijze van oplossen door een voorbeeld nader toe te lichten, zoo laat gevraagd worden de wortels te berekenen der vergelijking

$$x^3 - 21x + 37 = 0$$

waarin $a = 21$, $b = 37$, en dus $(\tfrac{1}{2}b)^2 < (\tfrac{1}{3}a)^3$.

---

*) Dat de drie gevonden waarden van $x$ werkelijk aan de gegeven vergelijking voldoen, wordt hierdoor bevestigd, dat men met behulp der form. (67) en (55) § 3, zal bevinden

$$x + x' + x'' = 0$$

$$xx' + xx'' + x'x'' = -a \quad \text{en} \quad xx'x'' = -b.$$

Zie hier den loop der berekening volgens de eerste oplossing

$$\tfrac{1}{3}a = 7, \qquad 4b = 148.$$

$$\begin{aligned}
\log 7 &= 0{,}8450980 \\
&\quad {}_{2}\overline{\phantom{0,0000000}} \\
&\phantom{=}\ 0{,}4225490 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log m &= 0{,}7235790 \\[1ex]
\log m^3 &= 2{,}1707370 \\
\log 148 &= 2{,}1702617 \\
\log \sin 3\varphi &= {}^{0}{,}9995247 \\
3\varphi &= 87^\circ 19' 12'' \\
\varphi &= 20^\circ\ 6'\ 24'' \\
60^\circ - \varphi &= 30^\circ\ 53'36'' \\
60^\circ + \varphi &= 89^\circ\ \ 6'24''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log m &= 0{,}7235790 \\
\log \sin \varphi &= 9{,}6870266 \\
\log x &= 0{,}4106056 \\
x &= 2{,}573982 \\
&- \\
\log m &= 0{,}7235790 \\
\log \sin (60^\circ - \varphi) &= 9{,}7104909 \\
\log x' &= 0{,}4340699 \\
x' &= 2{,}716877 \\
&- \\
\log m &= 0{,}7235790 \\
\log \sin (60^\circ + \varphi) &= 9{,}9999472 \\
\log x'' &= 0{,}9235262 \\
x'' &= -\ 5{,}290859
\end{aligned}$$

34. Het is echter niet alleen in het geval van drie bestaanbare wortels, maar ook in dat, waarin de vergelijking slechts één bestaanbaren wortel bezit, dat men zich van eene goniometrische oplossing met voordeel kan bedienen. Zie hier den weg, dien men daartoe kan inslaan, zonder hierbij, zoo als gewoonlijk geschiedt, de formule van Cardanus tot grondslag te nemen.

Men onderstelle vooreerst in de vergelijking

$$x^3 - ax + b = 0$$

$a$ positief en $\frac{4b}{m^3} > 1$, of $(\frac{1}{2}b)^2 > (\frac{1}{3}a)^3$. Zij wederom

$$x = my, \quad \text{en} \quad m = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Laat nu in de hieruit afgeleide vergelijking

$$y^3 - \tfrac{3}{4}y + \frac{b}{m^3} = 0,$$

$$\frac{m^3}{4b} = \sin\varphi, \quad \text{dus} \quad \frac{b}{m^3} = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{cosec}\,\varphi$$

en eindelijk
$$y = -\tfrac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)$$

gesteld worden, dan is blijkbaar

$$y^3 - \tfrac{3}{4}y = -\tfrac{1}{8}\left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right) = \frac{-b}{m^3}$$

en dus $\quad p^3 + \frac{1}{p^3} = \frac{8b}{m^3} = 2\, cosec\, \varphi = tg\, \frac{\varphi}{2} + cot\, \frac{\varphi}{2}$;

aan welke vergelijking mitsdien zal kunnen voldaan worden, door

$$p = \sqrt[3]{tg\, \frac{\varphi}{2}} = tg\, \psi$$

te stellen, gevende alzoo

$$x = my = -\frac{m}{2}(tg\, \psi + cot\, \psi) = \frac{-m}{sin\, 2\psi}.$$

De beide overige wortels der vergelijking worden aldus verkregen. Daar namelijk uit $p^3 = tg\, \frac{\varphi}{2}$ tevens volgt

$$p = r\sqrt[3]{tg\, \frac{\varphi}{2}}, \quad \text{en} \quad p = r'\sqrt[3]{tg\, \frac{\varphi}{2}},$$

zijnde hierin $r = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ en $r' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, of $r' = \frac{1}{r}$,

zoo bekomt men voor de beide onbestaanbare wortels

$$x' = -\frac{m}{2}\left\{r\, tg\, \psi + r'\, cot\, \psi\right\}$$

$$\text{en} \quad x'' = -\frac{m}{2}\left\{r'\, tg\, \psi + r\, cot\, \psi\right\}$$

welke beide uitdrukkingen gemakkelijk tot den navolgenden vorm kunnen herleid worden:

$$x' = -\frac{m}{2}\left\{cosec\, 2\psi + \sqrt{-3}\, .\, cot\, 2\psi\right\}$$

$$x'' = -\frac{m}{2}\left\{cosec\, 2\psi - \sqrt{-3}\, .\, cot\, 2\psi\right\}.$$

Beschouwen wij eindelijk de vergelijking

$$x^3 + ax + b = 0,$$

waarin $a$ positief zij, en die dus altijd twee onbestaanbare wortels moet opleveren.

Stelende wederom $x = my$, $\quad m = 2\sqrt{\frac{a}{3}}$, dan heeft men

$$y^3 + \tfrac{3}{4}y + \frac{b}{m^3} = 0.$$

Zij thans $\quad y = \tfrac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right),$

en dus $\quad y^3 + \tfrac{3}{4}y = \tfrac{1}{8}\left(p^3 - \frac{1}{p^3}\right) = \frac{-b}{m^3};$

waaraan voldaan wordt door

$$\frac{4b}{m^3} = cot\, \varphi, \qquad \text{of} \quad \frac{m^3}{4b} = tg\, \varphi,$$

en $p^3 = tg\,\frac{\varphi}{2}$ of $p = \sqrt[3]{tg\,\frac{\varphi}{2}} = tg\,\psi$

te stellen. Hierdoor vindt men voor den bestaanbaren wortel

$$x = -m\,cot\,2\,\psi$$

en voor de beide onbestaanbare wortels

$$x' = \frac{m}{2}\left\{r\,tg\,\psi - r'\,cot\,\psi\right\},\qquad x'' = \frac{m}{2}\left\{r'\,tg\,\psi - r\,cot\,\psi\right\},$$

welke beide laatste ook aldus kunnen voorgesteld worden:

$$x' = \frac{m}{2}\left\{cot\,2\,\psi + \sqrt{-3}\,.\,cosec\,2\,\psi\right\}$$

$$x'' = \frac{m}{2}\left\{cot\,2\,\psi - \sqrt{-3}\,.\,cosec\,2\,\psi\right\}.$$

35. Een enkel voorbeeld zal genoegzaam zijn, om insgelijks de formulen voor een der beide gevallen van onbestaanbaarheid van twee wortels nader toe te lichten.

Daartoe zij gegeven de vergelijking:

$$x^3 + 24x - 68 = 0,$$

waarin $a = 24$ en $b = -68$, dus $\frac{1}{3}a = 8$ en $4b = -272$. Deze vergelijking tot het laatste der drie voorgaande gevallen behoorende, zoo heeft men hierbij de navolgende bewerking:

$$log\,8 = 0,9030900$$
$$\frac{1}{2}\ \ 0,4515450$$
$$log\,2 = 0,3010300$$
$$log\,m = 0,7525750$$
$$\times 3$$
$$log\,m^3 = 2,2577250$$
$$log\,272 = 2,4345689$$
$$log\,tg\,\varphi = 2,8231561$$
$$\varphi = -33^0\,38'\,39'',3$$
$$\frac{\varphi}{2} = -16^0\,49'\,19'',65$$

$$log\,tg\,\frac{\varphi}{2} = 9,4804944$$
$$\frac{1}{3}$$
$$log\,tg\,\psi = 9,8268315$$
$$\psi = -33^0\,52'\,5'',76$$
$$2\psi = -67^0\,44'\,11'',52$$

$$log\,m = 0,7525750$$
$$log\,cot\,2\,\psi = 9,6121322$$
$$log\,x = 0,3647072$$
$$x = 2,315833$$
$$-$$

$$\frac{m}{2}cot\,2\,\psi = -1,157916$$
$$-$$

$$log\,m = 0,7525750$$
$$log\,sin\,\psi = 9,9663536$$
$$log\,m\,cosec\,2\,\psi = 0,7862214$$
$$m\,cosec\,2\,\psi = 6,112534$$
$$\frac{1}{2}\,m\,cosec\,2\,\psi = 3,056267$$

zoodat de beide onbestaanbare wortels zullen zijn

$$x' = -1,157916 - 3,056267\,\sqrt{-3}$$

en $$x'' = -1,157916 + 3,056267\,\sqrt{-3}.$$

De Trigonometrie is ontstaan als hulpmiddel bij de Astronomie, zodat dan ook de Sphaerische trigonometrie (driehoeken op een bol) eerder is ontstaan dan de vlakke.
Als stichter der sphaerische trigonometrie wordt beschouwd de Griek Hipparchus (150 v.C.), die tevens de astronomie tot wetenschap verhief.
Zij zowel als Menelaus (100 n.C.) hebben zich beziggehouden met de berekening van Cirkelkoorden en wat zij waren begonnen werd door Ptolemaeus (150 n.C.) voltooid, wiens groot astronomisch werk, de Almagest, tevens de gronden der Trigonometrie bevat en meer dan 1000 jaar het standaardwerk bleef.
Ptolemaeus verdeelde den Cirkelomtrek in 360 gelijke deelen met 60 telkens onderdeelen en deelde in deze deelen de Koorden uit, daarbij als grondstelling zijn theorema gebruikend.
Van de sporen, die de Indiers en Arabieren in de Trigonometrie hebben achtergelaten is vroeger (blz 2) gesproken; steeds bleef echter de sphaerische trigonometrie de hoofdzaak totdat eerst door Regiomontanus (1463) de vlakke driehoeksmeting tot dat belangrijk deel der wiskunde werd opgevoerd, dat ze nu is.
De berekeningen ondergingen een zeer belangrijke vereenvoudiging door de invoering der Logarithmen (1614).
De tegenwoordige Schrijfwijze en Inrichting der Trigonometrie is men verschuldigd aan Euler (1707-1783)

---

Hipparchus van Nicea, astronoom 160-125 v.C.; leefde te Alexandrië; deed onderzoekingen omtrent de duur van het jaar, groei en afname der maan, vaste sterren enz.
Ptolemaeus (Claudius), astronoom en geograaf, geboren 140 n.C. te Alexandrië; stichter van het Ptolemaeische wereldstelsel.
Regiomontanus, eigenlijk Johann Müller, wiskundige, geb. 1436 te Königsberg (Oost Pruisen), stierf te Rome 1476 als

# TWEEDE HOOFDSTUK.

## Rechtlijnige of Vlakke Driehoeksmeting.

### § 7.

*Over de oplossing der rechthoekige driehoeken.*

36. Volgens het besprokene in § 1 zullen wij de goniometrische grootheden niet als lijnen, maar als verhoudingen beschouwen, door invoering van den straal, die in de goniometrie om de aangevoerde gronden gelijk aan de eenheid gesteld mocht worden.

Zij ABC (fig. 6) een driehoek, die rechthoekig is in C en waarvan wij de hoeken door de groote letters bij de hoekpunten geplaatst en de zijden door de kleine letters, die overeenkomen met de groote letters der overstaande hoekpunten, zullen aanwijzen, zoodat $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, even als in de meetkunde. Beschouwen wij nu AB als den straal eens cirkels, die uit A als middelpunt wordt beschreven, dan is overeenkomstig de oorspronkelijke bepaling der goniometrische grootheden:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Evenzoo verkrijgen wij, door B als het middelpunt, AB als den straal eens cirkels aan te merken,

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De formulen (3) en (4) kunnen onmiddellijk uit (1) en (2) worden afgeleid door op te merken, dat B het complement is van A. Omgekeerd ligt in het gelijktijdig bestaan der vergelijkingen (1) en (4) of (2) en (3) opgesloten, dat de driehoek rechthoekig is in C.

Door de vergelijkingen (1) en (2) en ook (3) en (4) op elkander te deelen, volgt

$$tang\,A = cot\,B = \frac{a}{b},$$

$$cot\,A = tang\,B = \frac{b}{a},$$

welke formulen overeenkomen met de oorspronkelijke bepaling der tangenten. Wanneer men namelijk A als middelpunt, AC als straal eens cirkels beschouwt, is

$$tang\,A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b},$$

en door B als middelpunt, BC als straal te nemen,

$$tang\,B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

De formulen (1) — (4) verbonden met het theorema van PYTHAGORAS,

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

zijn voldoende voor de oplossing der rechthoekige driehoeken; zij zijn gemakkelijk in het geheugen te prenten, wanneer men ze op volgende wijze in woorden brengt.

*De sinus van elken scherpen hoek is gelijk aan de verhouding tusschen de overstaande rechthoekszijde en de hypotenusa.*

*De cosinus van elken scherpen hoek is gelijk aan de verhouding tusschen de aangelegen rechthoekszijde en de hypotenusa.*

*De tangens van elken scherpen hoek is gelijk aan de verhouding tusschen de overstaande en de aangelegen rechthoekszijde.*

*De som der vierkanten van de beide rechthoekszijden is gelijk aan het vierkant der hypotenusa.*

37. Zooals in de meetkunde geleerd is, heeft men voor de bepaling van een rechthoekigen driehoek, behalve den rechten hoek, nog twee elementen noodig en even als daar het doel is, in elk geval den driehoek te construeeren, moet nu in elk geval uit de getallenwaarde der gegevene elementen, die van de onbekende afgeleid worden. De verschillende gevallen van oplossing, die zich hierbij kunnen voordoen, zijn:

bisschop van Regensburg. Hij voerde de tangens in de trigonometrie in.

Logarithmen zijn door John Briggs in 1610 uitgevonden.

Euler (Leonard) een der heroën op wiskundig gebied werd geboren te Bazel in 1707 en stierf te St. Petersburg in 1782; heeft talrijke werken geschreven.

1. Gegeven de hypotenusa en eene rechthoekszijde, te berekenen de andere zijde en de beide scherpe hoeken.

2. Gegeven de hypotenusa en een scherpen hoek, te berekenen den anderen hoek en de beide rechthoekszijden.

3. Gegeven eene rechthoekszijde en een scherpen hoek, te berekenen de hypotenusa, de andere rechthoekszijde en den anderen scherpen hoek.

4. Gegeven de beide rechthoekszijden, te berekenen de hypotenusa en de scherpe hoeken.

Voor dat men eenigen driehoek in getallen gaat berekenen, is het noodig te onderzoeken of de gegevens onderling bestaanbaar zijn, dat is, of uit de gegeven elementen een driehoek kan samengesteld worden. Daarom zullen wij bij elk geval de voorwaarden, waaraan de gegevens moeten voldoen, opnoemen; mochten de getallen-opgaven daarmede niet overeenkomen, dan kan men de berekening sparen, omdat men op onmogelijke uitkomsten zou stuiten.

Bij elke oplossing moet men zoo veel mogelijk trachten elk der onbekenden onmiddellijk uit te drukken in de gegevens en niet de eene onbekende afleiden uit de anderen. Daarbij toch zou eene fout, in de eerste berekening gemaakt, overgaan op de volgende, terwijl bij de eerstgenoemde handelwijze eene fout in eene berekening van geen invloed is op de andere.

Eindelijk moet elke formule, die de getallenwaarde van een element oplevert, zoo zij het niet mocht zijn, voor de berekening met logarithmen geschikt gemaakt worden. De regels en voorbeelden van § 5 en § 6 kunnen hierbij veel dienst bewijzen.

Wij zullen nu de vier genoemde gevallen van oplossing achtereenvolgens behandelen, en bij elk een voorbeeld in getallen voegen.

## 1ste GEVAL.

38. *Gegeven de hypotenusa $c$ en eene rechthoekszijde $a$, te berekenen de derde zijde $b$ en de beide scherpe hoeken* A *en* B.

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarde $c > a$, omdat de hypotenusa altijd de langste zijde eens rechthoekigen driehoeks is.

De formulen, die elk der onbekenden uitdrukken in de gegevens, zijn

$$b = \sqrt{(c^2 - a^2)}, \quad \sin A = \cos B = \frac{a}{c}.$$

Om de eerste voor de berekening met logarithmen geschikt te maken, schrijft men haar in den vorm

$$b = \sqrt{(c+a)(c-a)}.$$

De laatste geeft terstond de waarden van A en B. Men heeft dus voor de berekening het volgende stelsel

$$\log b = \tfrac{1}{2}\left\{\log(c+a) + \log(c-a)\right\},$$

$$\log \sin A = \log \cos B = \log a - \log c.$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 542{,}84$. $c = 981{,}374$.

*Berekening.*

$$\begin{aligned} c - a &= 438{,}534 \\ c + a &= 1524{,}214 \\ \log c + a &= 3{,}1830460 \\ \log c - a &= 2{,}6420033 \\ &\overline{\phantom{5{,}8250493}}\ \textit{opg.} \\ &\phantom{=}\ 5{,}8250493 \\ 2&\overline{\phantom{5{,}8250493}} \\ \log b &= 2.9125246 \\ b &= 817{,}569. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}7346718 \\ \log c &= 2{,}9918346 \\ &\overline{\phantom{9{,}7428372}}\ \textit{afg.} \\ \log \sin A &= 9{,}7428372 \\ A &= 33^{\circ}\,34'\,58'',4 \\ B &= 56^{\circ}\,25'\,1'',6. \end{aligned}$$

*Aanmerking.* Indien de hoek A weinig van 90° verschilt (hetgeen uit de gegevens blijkt, wanneer $a$ en $c$ weinig verschillen) en alzoo niet zeer nauwkeurig door zijn sinus kan worden bepaald *), zal het, ingeval eene zeer juiste berekening van dien hoek gevorderd wordt, verkieslijker zijn den volgenden weg in te slaan.

De formulen (32) en (36) § 3 geven

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}}, \quad \tan \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}},$$

of omdat $\cos B = \dfrac{a}{c}$

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2c}\right)}, \quad \tan \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{c-a}{c+a}\right)};$$

door elk van deze formulen kan de kleine hoek $\tfrac{1}{2}$ B zeer nauwkeurig berekend worden.

*) Hoe minder de hoeken van 90° verschillen, des te kleiner worden de verschillen van hunne sinussen, en hierdoor ontstaat er eenige onzekerheid bij de berekening van het ontbrekende aantal secunden en verdere onderdeelen, naar het voorschrift van § 4.

## II^de GEVAL.

*Gegeven de hypotenusa c en een scherpe hoek* A, *te berekenen den hoek* B *en de beide rechthoekszijden a en c.*

De gegevens behoeven aan geene andere voorwaarden te voldoen dan $A < 90^0$.

De betrekkingen tusschen elke onbekende en de gegevens zijn

$$B = 90^0 - A$$

$$a = c \sin A, \qquad b = c \cos A,$$

of in logarithmen

$$\log a = \log c + \log \sin A, \qquad \log b = \log c + \log \cos A.$$

*Voorbeeld.* Zij $c = 786{,}73$. $A = 63^\circ\ 28'\ 17'',3$.

*Berekening.*

$$B = 90^\circ - A = 26^0\ 31'\ 42'',7$$

| | |
|---|---|
| $\log c = 2{,}8958257$ | $\log c = 2{,}8958257$ |
| $\log \sin A = 9{,}9516833$ | $\log \cos A = 9{,}6499609$ |
| ——— *opg.* | ——— *opg.* |
| $\log a = 2{,}8475090$ | $\log b = 2{,}5457866$ |
| $a = 703{,}897.$ | $b = 351{,}388.$ |

## III^de GEVAL.

*Gegeven zijnde eene rechthoekszijde a en een scherpe hoek* A *of* B, *te berekenen den anderen hoek, de hypotenusa c en de derde zijde b.*

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen behalve A of $B < 90^0$.

Den onbekenden scherpen hoek vindt men telkens uit den gegeven door het complement te nemen.

Verder zijn hier de formulen

$$c = \frac{a}{\sin A}, \qquad b = a \cot A.$$

$$\log c = \log a - \log \sin A, \qquad \log b = \log a + \log \cot A.$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 804{,}498$. $A = 40^\circ\ 32'\ 50'',8$.

*Berekening.*

$$B = 90^0 - A = 49^0\ 27'\ 9'',2$$

| | |
|---|---|
| $\log a = 2{,}9055250$ | $\log a = 2{,}9055250$ |
| $\log \sin A = 9{,}8129652$ | $\log \cot A = 0{,}0677730$ |
| ——— *afg.* | ——— *opg.* |
| $\log c = 3{,}0925598$ | $\log b = 2{,}9732980$ |
| $c = 1237{,}542.$ | $b = 940{,}368.$ |

## IV^de GEVAL.

*Gegeven zijnde de beide rechthoekszijden a en b, te berekenen de hypotenusa c en de beide scherpe hoeken.*

De gegevens behoeven aan geene voorwaarden te voldoen.

Om de onbekenden in de gegevens uit te drukken, dienen de formulen

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)},$$

$$tang\, A = cot\, B = \frac{a}{b}.$$

De eerste is bij groote getalwaarden van $a$ en $b$ niet geschikt voor de berekening met logarithmen, maar kan naar het voorschrift van § 6 geschikt gemaakt worden, door te stellen

$$cot\, \alpha = \frac{b}{a}\text{, dan is } c = \frac{a}{sin\, \alpha},$$

hetgeen op het zelfde neêrkomt, als dat men eerst den hoek $\alpha = A$ berekent en van dezen hoek gebruik maakt om $c$ te vinden. Hier moet men dus van den regel om elke onbekende in de gegevens uit te drukken afwijken, omdat men anders op eene niet logarithmische formule stuit.

Voor de berekening heeft men nu

$$log\, tang\, A = log\, a - log\, b\text{, } log\, c = log\, a - log\, sin\, A.$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 3004{,}56$, $b = 5682{,}095$.

*Berekening.*

$log\, a = 3{,}4776809$
$log\, b = 3{,}7545085$
afg.
$log\, tang\, A = 9{,}7232724$
$A = 27^\circ\, 52'\, 7'',86$
$B = 62^\circ\, 7'\, 52'',14.$

$log\, a = 3{,}4777809$
$log\, sin\, A = 9{,}6697344$
afg.
$log\, c = 3{,}8080465$
$c = 6427{,}564.$

*Aanmerking.* Men kan de onbekende hoeken ook door de navolgende formule bepalen.

Uit de vergelijking $tg\, 2B = \frac{2\, tg\, B}{1 - tg^2\, B}$,

volgt namelijk, omdat $tg\, B = \frac{b}{a}$,

$$tg\, 2B = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{(a+b)(a-b)},$$

(1) Zie de Sinus-regel.

maar $A - B = 90^0 - 2B$ zijnde, zal

$$tg\,(A - B) = cot\,2B = \frac{(a + b)\,(a - b)}{2ab},$$

en hierdoor kan het verschil der onbekende hoeken gevonden worden. Men heeft vervolgens

$$A = 45^0 + \tfrac{1}{2}(A - B) \quad \text{en} \quad B = 45^0 - \tfrac{1}{2}(A - B).$$

## § 8.

### *Over de oplossing der scheefhoekige driehoeken.*

39. Zij ABC een willekeurige scheefhoekige (fig. 7) of stomphoekige (fig. 8) driehoek, waarin wij weder de zijden, staande over de hoeken A, B, C, door de kleine letters *a, b, c* zullen aanwijzen, en laat uit een der hoekpunten B, eene loodlijn BD op de overstaande zijde AC worden neergelaten, waardoor twee rechthoekige driehoeken ontstaan. Wij zullen alsnu, uit de in de vorige § reeds gevonden formulen, gemakkelijk de meer algemeene formulen kunnen afleiden, welke tot de oplossing der onderscheidene gevallen van de scheefhoekige driehoeken moeten dienen.

Men heeft namelijk in elk der rechthoekige driehoeken ABD, DBC,

$$BD = AB\,sin\,A = BC\,sin\,C,$$

dat is $\quad c\,sin\,A = a\,sin\,C,$

of $\quad a : c = sin\,A : sin\,C \quad \ldots\ldots \quad (5)$

Op gelijke wijze zou men, door de loodlijn uit eene der beide andere hoekpunten te trekken, gevonden hebben,

$$a : b = sin\,A : sin\,B \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

dus $\quad a : sin\,A = b : sin\,B = c : sin\,C \quad \ldots \quad (7)$

ons leerende, dat *in elken driehoek de zijden tot elkander in reden staan als de sinussen van de overstaande hoeken.*

De standvastige verhouding van den sinus eens hoeks en de tegenovergelegen zijde wordt de *modulus* des driehoeks genoemd, zoodat

$$M = \frac{sin\,A}{a} = \frac{sin\,B}{b} = \frac{sin\,C}{c}.$$

Het zal den lezer niet moeielijk vallen aan te toonen, dat deze modulus het omgekeerde voorstelt van de middellijn des cirkels, die om den driehoek kan beschreven worden.

Uit (6) kan men de volgende evenredigheid afleiden:

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B.$$

Derhalve volgens form. (57) § 3

$$a + b : a - b = tg\ \tfrac{1}{2}\,(A + B) : tg\ \tfrac{1}{2}\,(A - B);$$

dat is:

*In elken driehoek staat de som van twee zijden tot haar verschil, als de tangens van de halve som der overstaande hoeken tot den tangens van het halve verschil dezer hoeken.*

Omdat $\frac{1}{2}\,(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}\,C$, kan de voorgaande evenredigheid ook aldus geschreven worden:

$$a + b : a - b = \cot \tfrac{1}{2}\,C : tg\ \tfrac{1}{2}\,(A - B),$$

waaruit $$tg\ \tfrac{1}{2}\,(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \tfrac{1}{2}\,C \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

of ook $$tg\,(B + \tfrac{1}{2}\,C) = \left(\frac{a + b}{a - b}\right) tg\ \tfrac{1}{2}\,C \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

als zijnde $\frac{1}{2}\,(A - B) = \frac{1}{2}\,(180^\circ - 2B - C) = 90^\circ - (B + \frac{1}{2}\,C)$.

40. Uit de evenredigheid (7) laten zich nog twee andere fraaie betrekkingen afleiden, welke, even als de voorgaande, bij een der gevallen van oplossing hare toepassing vinden, zoo als straks nader zal aangetoond worden. Die evenredigheid geeft namelijk tevens de volgende:

$$a + b : c = \sin A + \sin B : \sin C = \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) : \sin \tfrac{1}{2}\,C \cos \tfrac{1}{2}\,C.$$

Maar, aangezien $A + B = 180^\circ - C$, is

$$\sin\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cos \tfrac{1}{2}\,C.$$

Derhalve $$a + b : c = \cos \tfrac{1}{2}\,(A - B) : \sin \tfrac{1}{2}\,C \quad . \; . \quad (10)$$

Op gelijke wijze vindt men

$$a - b : c = \sin \tfrac{1}{2}\,(A - B) : \cos \tfrac{1}{2}\,C \quad . \; . \; . \quad (11)$$

welke beide evenredigheden door deeling op nieuw de formule (8) te voorschijn brengen.

Zij geven daarenboven

$$c = (a + b)\,\frac{\sin \tfrac{1}{2}\,C}{\cos \tfrac{1}{2}\,(A - B)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

en $$c = (a - b)\,\frac{\cos \tfrac{1}{2}\,C}{\cos \tfrac{1}{2}\,(A - B)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

waardoor men eene der zijden van een driehoek zoude kunnen berekenen, indien men gegeven had de som of het verschil der

(1) Dit is de Tangens-Regel.

(2) Dit zijn de formules van Cagnoli ook wel die van Mollweide genoemd

(c) Beweis der Cosinus-Regel.

beide overige zijden, den ingesloten hoek, benevens het verschil der overstaande hoeken.

Elke dezer laatste formulen in het vierkant brengende, zoo leidt men hieruit gemakkelijk af

$$c^2 = (a + b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C + (a - b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C \quad . \quad . \quad (14)$$

welke vergelijking, na ontwikkeling, en met inachtneming, dat

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2 \tfrac{1}{2} C = \cos C,$$

geeft

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Deze voorname formule stemt geheel overeen met, en kan gemakkelijk afgeleid worden uit, de bekende meetkundige betrekking tusschen de drie zijden en de projectie van eene der zijden op eene andere *). Zij gaat onmiddellijk in die betrekking over, wanneer men volgens fig. 7

$$a \cos C = CD,$$

en volgens fig. 8

$$-a \cos C = a \cos (180^\circ - C) = CD \text{ stelt.}$$

41. De vergelijking (14) geeft te kennen, dat de zijde $c$ de hypotenusa voorstelt eens rechthoekigen driehoeks, tot rechthoekszijden hebbende

$$(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C \quad \text{en} \quad (a - b) \cos \tfrac{1}{2} C,$$

eene eigenschap, welke tevens door de navolgende vrij eenvoudige constructie afzonderlijk kan betoogd worden.

Men beschrijve namelijk uit het hoekpunt C des driehoeks ABC (fig. 9) als middelpunt, met een straal gelijk aan de grootste der beide zijden $a$ en $b$, een halven cirkel, en trekke daarin de middellijn DCE, de koorden DB, EB, en uit A de loodlijn AF op BD, dan zal, omdat die beide koorden op elkander loodrecht staan, AF evenwijdig met BE loopen. Nu is

$$AD = a + b, \quad AE = a - b, \quad \angle CDB = \tfrac{1}{2} C,$$

dus $\quad AF = AD \times \sin D = (a + b) \sin \tfrac{1}{2} C.$

Maar $\quad AE : BF = AD : FD = 1 : \cos \tfrac{1}{2} C,$

dus $\quad BF = (a - b) \cos \tfrac{1}{2} C$

en $\quad AB^2 = AF^2 + BF^2 = (a + b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C + (a - b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C.$

Verder geeft de driehoek ABF, aangezien hoek $ABF = B + \tfrac{1}{2} C$, ter bepaling van de zijde AB, nog de vergelijkingen

$$c = \frac{(a-b) \cos \tfrac{1}{2} C}{\cos(B + \tfrac{1}{2} C)} = \frac{(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C}{\sin(B + \tfrac{1}{2} C)} = \frac{(a - b) \cos \tfrac{1}{2} C}{\sin \tfrac{1}{2} (A - B)} = \frac{(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C}{\cos \tfrac{1}{2} (A - B)},$$

even als hierboven langs een anderen weg gevonden is.

*) Zie VAN GEER: Leerboek der Meetkunde. I. § 11.

Dezelfde constructie levert tevens een eenvoudig meetkundig betoog op der verg. (8). Immers, uit de evenredigheid

$$\mathrm{EA} : \mathrm{AD} = \mathrm{BF} : \mathrm{FD} = tg\ \mathrm{BAF} : tg\ \mathrm{FAD} = cot(\mathrm{B} + \tfrac{1}{2}\mathrm{C}) : cot\ \tfrac{1}{2}\mathrm{C},$$

volgt $\quad cot(\mathrm{B} + \frac{1}{2}\mathrm{C}) = tg\ \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{a-b}{a+b} cot\ \frac{1}{2}\mathrm{C}.$

De hiervoor gevondene form. (15)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \mathrm{C}$$

laat zich insgelijks rechtstreeks betoogen.

Te dien einde heeft men in fig. 7

$$\mathrm{BD} = a\ sin\ \mathrm{C} \quad \text{en} \quad \mathrm{AD} = b - a\ cos\ \mathrm{C},$$

en in fig. 8

$$\mathrm{BD} = a\ sin\ (180^0 - \mathrm{C}), \qquad \mathrm{AD} = b + a\ cos\ (180^0 - \mathrm{C})$$

of $\quad \mathrm{BD} = a\ sin\ \mathrm{C} \qquad \mathrm{AD} = b - a\ cos\ \mathrm{C},$

dus in beide gevallen

$$c^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{AD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \mathrm{C}.$$

Op gelijke wijze zal men voor de beide overige zijden $a$ en $b$ bekomen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \mathrm{A}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ \mathrm{B}.$$

42. Het verdient opmerking, dat deze betrekking tusschen de drie zijden en een der hoeken nog daarenboven kan afgeleid worden uit form. (78), § 3; bevattende eene betrekking tusschen de sinussen en cosinussen van drie hoeken, te samen 180⁰ uitmakende. Schrijft men namelijk voor die hoeken: A, B, C, dan geeft de aangehaalde formule

$$\frac{sin^2\ \mathrm{C}}{sin^2\ \mathrm{A}} = 1 + \frac{sin^2\ \mathrm{B}}{sin^2\ \mathrm{A}} - \frac{2\ sin\ \mathrm{B}}{sin\ \mathrm{A}} cos\ \mathrm{C},$$

die, uithoofde

$$\frac{sin\ \mathrm{C}}{sin\ \mathrm{A}} = \frac{c}{a} \quad \text{en} \quad \frac{sin\ \mathrm{B}}{sin\ \mathrm{A}} = \frac{b}{a},$$

terstond verandert in

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \mathrm{C}.$$

Uit de beschouwing der figuur kan men tevens gemakkelijk eene formule vinden om, indien twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijn, hieruit rechtstreeks een der onbekende hoeken te bepalen. Te dien einde geeft de rechthoekige driehoek BAD

$$tg\ \mathrm{A} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{a\ sin\ \mathrm{C}}{b - a\ cos\ \mathrm{C}},$$

(1) Dus de projectie Regel.

en evenzoo $$tg\,B = \frac{b\sin C}{a - b\cos C},$$

welke formulen echter voor de logarithmische berekening minder geschikt zijn dan de form. (8).

De figuur levert daarenboven de navolgende betrekkingen tusschen drie zijden en twee hoeken op.

$$a = b\cos C + c\cos B,$$
$$b = a\cos C + c\cos A,$$
$$c = a\cos B + b\cos A,$$

waaruit weder alle overige trigonometrische betrekkingen kunnen afgeleid worden.

43. Ter bepaling van den hoek C uit de drie zijden, heeft men de formule

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

die echter op de navolgende wijze, onder een anderen en voor de berekening met logarithmen, meer geschikten vorm kan gebracht worden.

Men heeft namelijk

$$1 - \cos C = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab},$$

dus $$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} = \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{4ab}.$$

Men stelle nu de som der drie zijden, of $a + b + c = 2s$,

dan is $$\frac{c+a-b}{2} = s - b, \quad \frac{c+b-c}{2} = s - a.$$

Hierdoor gaat de laatste formule over in

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}$$

of $$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Verder heeft men nog

$$1 + \cos C = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - c^2}{2ab},$$

dus $$\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}$$

of $$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Eindelijk $\quad tg\,\frac{1}{2}\,C = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,C}{cos\,\frac{1}{2}\,C} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ . . . (19)

en $\quad sin\,C = 2\,sin\,\frac{1}{2}\,C\,cos\,\frac{1}{2}\,C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ . (20)

Het is onnoodig hier te doen opmerken, dat al de tot dus ver gevonden formulen, door eene behoorlijke verwisseling van letters, tevens op elke der overige hoeken van toepassing kunnen gemaakt worden. Zoo heeft men insgelijks:

$$sin\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$cos\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$sin\,A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-c)(s-b)(s-c)};$$

en

$$sin\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$cos\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$sin\,B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

44. Zie hier nog eene andere en minder bekende wijze om tot de voorgaande formulen te geraken.

Volgens de evenredigheid (10) en omdat

$$sin\,\frac{1}{2}\,C = cos\,\frac{1}{2}\,(A+B),\quad cos\,\frac{1}{2}\,C = sin\,\frac{1}{2}\,(A+B),$$

heeft men, door optelling en aftrekking der termen

$$a+b+c : a+b-c = cos\,\frac{1}{2}(A-B) + cos\,\frac{1}{2}(A+B) : cos\,\frac{1}{2}(A-B) - cos\,\frac{1}{2}(A+B) = cos\,\frac{1}{2}\,A\,cos\,\frac{1}{2}\,B : sin\,\frac{1}{2}\,A\,sin\,\frac{1}{2}\,B,$$

dus $\quad a+b+c : a+b-c = cot\,\frac{1}{2}\,A : tg\,\frac{1}{2}\,B$ . . . (21)

Op gelijke wijze zal men uit (11) kunnen afleiden

$$a-b+c : c+b-c = sin\,\frac{1}{2}(A-B) + sin\,\frac{1}{2}(A+B) : sin\,\frac{1}{2}(A+B) - sin\,\frac{1}{2}(A-B),$$

dus $\quad a-b+c : c+b-a = sin\,\frac{1}{2}\,A\,cos\,\frac{1}{2}\,B : sin\,\frac{1}{2}\,B\,cos\,\frac{1}{2}\,A = tg\,\frac{1}{2}\,A : tg\,\frac{1}{2}\,B$ . . . . . . . . (22)

Deze laatste evenredigheid met (21) vermenigvuldigende, verkrijgt men terstond

$$tg^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(a+b-c)(c+b-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}$$

of $$tg \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}.$$

Voorts is $sec^2 \tfrac{1}{2} B = 1 + tg^2 \tfrac{1}{2} B = \dfrac{s(s-b)+(s-a)(s-c)}{s(s-b)}$

$$= \frac{2s^2 - (a+b+c)s + ac}{s(s-b)} = \frac{ac}{s(s-b)},$$

dus $$cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

waaruit verder $$sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

even als vroeger gevonden is.

45. Wij gaan thans over tot de behandeling der bijzondere gevallen, die zich bij de oplossing der scheefhoekige driehoeken voordoen. Zij zijn vier in getal. De gegevens kunnen namelijk zijn:

1. De drie zijden.
2. Eene zijde en twee hoeken.
3. Twee zijden en de tusschengelegen hoek.
4. Twee zijden en een der overstaande hoeken.

## Iste GEVAL.

*Gegeven zijnde de drie zijden, te berekenen de drie hoeken.*

De gegevens moeten aan de voorwaarden voldoen, dat elke zijde kleiner is dan de som en grooter dan het verschil der beide anderen.

De formulen, die de betrekkingen tusschen de gegevens en elk der onbekenden uitdrukken, zijn:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

gevende

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

welke formulen voor de berekening van A, B, C slechts kunnen gebruikt worden, wanneer $a$, $b$, $c$ kleine getallen zijn. In elk ander geval moeten zij logarithmisch gemaakt worden, hetgeen

hierboven (n°. 43) reeds is geschied. Daar hebben wij het volgende stel formulen gekregen:

$$\begin{cases} \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\ \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \\ \sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \\ \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \\ \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \end{cases} \quad \begin{cases} \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{cases}$$

Elke van deze vier groepen kan dienen voor de berekening, doch het is niet geheel onverschillig, welke men daartoe neemt.

De laatste groep is in het algemeen het minst te verkiezen, niet zoozeer omdat de formulen den langsten vorm bezitten, want de wortels hebben juist het voordeel voor de drie hoeken dezelfde te zijn, maar omdat de sinussen der *geheele* hoeken worden gevonden, waarbij het altijd twijfelachtig is, welk van de beide hoeken, tot denzelfden sinus behoorende, genomen moet worden. Uit de gegevens is dit trouwens vooraf wel op te maken, want in de meetkunde wordt geleerd, dat de drie hoeken eens driehoeks scherp zijn, wanneer het vierkant van elke zijde kleiner is dan de som der vierkanten van de beide anderen, en wanneer er een stompe hoek mocht zijn, deze gelegen is tegenover die zijde, waarvan het vierkant grooter is dan de genoemde som.

De drie andere groepen geven de halve hoeken, die altijd scherp zijn, dus in het eerste kwadrant moeten genomen worden. Welke groep men neemt is tamelijk onverschillig, doch het zal aan de aandacht van een geoefend cijferaar niet ontsnappen, dat de derde de voorkeur verdient, omdat in de drie formulen slechts vier verschillende getallen voorkomen en in elk der drie anderen zeven. Ook kunnen in het algemeen de tangenten uit de logarithmen nauwkeuriger bepaald worden dan de sinussen en cosinussen. Mocht echter slechts één hoek verlangd worden, hetgeen in toepassingen dikwijls het geval is, dan kan met voordeel van

eene der formulen uit de tweede groep gebruik gemaakt worden, omdat daarin de eenvoudigste getallen voorkomen.

46. Om de drie hoeken te berekenen kan men nog een anderen weg inslaan. Men berekent namelijk een der hoeken op de bovengenoemde wijze en hieruit de beide anderen door de formule

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C.$$

Deze weg is niet aan te raden, omdat men eene der onbekenden gebruikt om de anderen te vinden en dus eene fout, in de eerste berekening gemaakt, overal van invloed is. Ook is hij minder nauwkeurig.

Men zou kunnen volstaan met twee hoeken te berekenen en den derden te bepalen door de eigenschap, dat de som van de drie hoeken $= 180^\circ$, doch deze handelwijze is zeer af te keuren, omdat genoemde eigenschap tot proef op de som voor de juistheid der berekening moet dienen.

*Voorbeeld.* Zij $a = 4693{,}25$, $b = 3627{,}9$, $c = 2077{,}01$.

*Berekening.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a =$ | 4693,25 | | |
| $b =$ | 3627,90 | | |
| $c =$ | 2076,01 | | |
| | ——— *opg.* | | |
| $2s =$ | 10397,16 | | |
| $s =$ | 5198,58 | $\log s$ | $= 3{,}7158847$ |
| $s - a =$ | 505,33 | $\log (s-a)$ | $= 2{,}7035751$ |
| $s - b =$ | 1570,68 | $\log (s-b)$ | $= 5{,}1960877$ |
| $s - c =$ | 3122,57 | $\log (s-c)$ | $= 3{,}4945121$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log (s-b)$ | $= 3{,}1960877$ | $\log (s-a)$ | $= 2{,}7035751$ |
| $\log (s-c)$ | $= 3{,}4945121$ | $\log (s-c)$ | $= 3{,}4945121$ |
| $C \log s$ | $= 6{,}2841153$ | $C \log s$ | $= 6{,}2841153$ |
| $C \log (s-a)$ | $= 7{,}2964249$ | $C \log (s-b)$ | $= 6{,}8039123$ |
| | ——— *opg.* | | ——— *opg.* |
| | 0,2711400 | | 9,2861148 |
| 2 | ——— | 2 | ——— |
| $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ | $= 0{,}1355700$ | $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} B$ | $= 9{,}6430574$ |
| $\frac{1}{2} A$ | $= 53^\circ\ 48'\ 3'',49$ | $\frac{1}{2} B$ | $= 23^\circ\ 43'\ 49''$ |
| $A$ | $= 107^\circ\ 36'\ 6'',98$ | $B$ | $= 47^\circ\ 27'\ 38''$ |

$$\begin{aligned} \log (s-a) &= 2{,}7035751 \\ \log (s-b) &= 3{,}1960877 \\ C \log s &= 6{,}2841153 \\ C \log (s-c) &= 6{,}5054879 \end{aligned}$$

opg.

$$8{,}6892660$$

$$2$$

$$\begin{aligned} \log tang\ \tfrac{1}{2} C &= 9{,}3446330 \\ \tfrac{1}{2} C &= 12^\circ\ 28'\ 7'',5 \\ C &= 24^\circ\ 56'\ 15''. \end{aligned}$$

*Proef op de som.*

$$\begin{aligned} A &= 107^\circ\ 56'\ 6'',98 \\ B &= 47^\circ\ 27'\ 38'' \\ C &= 24^\circ\ 56'\ 15'' \end{aligned}$$

opg.

$$179^\circ\ 59'\ 59'',98$$

gevende een verschil van 0",02, zijnde zoo nauwkeurig als verlangd kan worden.

Men kan het volgend voorbeeld tevens gebruiken, om daarop achtereenvolgens elk der drie overige gevallen van toepassing te maken, hetgeen den leerling tot eene nuttige oefening zal strekken.

*Voorbeeld.* $a = 5036{,}958$, $b = 3229{,}151$ en $c = 6361{,}947$.

Men zal vinden

$$A = 51^\circ\ 35'\ 0'',86,\ B = 30^\circ\ 9'\ 8'',80,\ C = 98^\circ\ 15'\ 50'',54.$$

## II^de GEVAL.

*Gegeven eene zijde a en twee hoeken, te berekenen den derden hoek en de beide andere zijden.*

De gegevens behoeven aan geene andere voorwaarde te voldoen, dan dat de som der gegeven hoeken kleiner zij dan 180°.

De derde hoek kan ook als een gegeven beschouwd worden, omdat hij onmiddellijk wordt gevonden door de som der gegeven hoeken van 180° af te trekken.

Voor de berekening der gevraagde zijden heeft men de formulen

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

dus

$$\begin{aligned} \log b &= \log a - \log \sin A + \log \sin B \\ \log c &= \log a - \log \sin A + \log \sin C. \end{aligned}$$

[illegible] Tangensatz:

[illegible] $a+b : a-b = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$

[illegible] $A-B$ [illegible] $A+B$ [illegible]

[illegible] $A+B$ [illegible]

*Voorbeeld.* Zij $a = 100{,}0579$. $B = 94^\circ\ 15'\ 19''$. $C = 56^\circ\ 0'\ 25'',5$,
dus $A = 180^\circ - 150^\circ\ 15'\ 44'',5 = 29^\circ\ 44'\ 15'',5$.

*Berekening.*

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{,}0002514 \\ \log \sin A = & 9{,}6955072 \\ & \overline{\phantom{2{,}0002514}}\ afg. \\ & 2{,}3047442 \\ \log \sin B = & 9{,}9988012 \\ & \overline{\phantom{2{,}0002514}}\ opg. \\ \log b = & 2{,}3035454 \\ b = & 201{,}1617 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2{,}3047442 \\ \log \sin C = & 9{,}9186104 \\ & \overline{\phantom{2{,}0002514}}\ opg. \\ \log c = & 2{,}2233546 \\ c = & 167{,}2455. \end{array}$$

## III^de^ GEVAL.

*Gegeven zijnde twee zijden a en b met den ingesloten hoek* C, *te vinden de beide overige hoeken* A, B, *benevens de derde zijde c.*

47. Men vindt de beide onbekende hoeken A en B, door de formule (9)

$$tg\,(B + \tfrac{1}{2}C) = \left(\frac{a+b}{a-b}\right) tg\,\tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

waardoor B, en dus ook A kan berekend worden. Vervolgens zal men de derde zijde $c$ vinden, door eene der formulen

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \quad \text{of} \quad c = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

of wel door de navolgende

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\sin (B + \frac{1}{2} C)}$$

$$c = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} C}{\cos (B + \frac{1}{2} C)}$$

waarin de hoek $B + \frac{1}{2}C$ reeds uit ($\alpha$) gevonden is.

48. Bijaldien men eeniglijk de derde zijde $c$, en niet de hoeken A en B behoeft te kennen, zou men daartoe rechtstreeks kunnen geraken, door middel der hiervoor (n°. 42) gevonden betrekking

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\text{of} \quad c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos C)}.$$

Daar echter deze formule voor eene logarithmische berekening weinig geschikt is, zoo kan zij daartoe door de navolgende herleiding ingericht worden.

Men schrijve namelijk voor $cos$ C zijne waarde $1 - 2\,sin^2 \frac{1}{2} C$, dan komt er

$$c^2 = (a-b)^2 + 4ab\,sin^2 \tfrac{1}{2} C = (a-b)^2 \left\{1 + \frac{4ab\,sin^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}\right\}.$$

Stellende nu verder

$$tg^2\ \varphi = \frac{4ab\,sin^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}$$

$$\text{of} \qquad tg\ \varphi = \frac{2\,sin \frac{1}{2} C}{a-b} \sqrt{ab},$$

dan vindt men

$$c^2 = (a-b)^2 \left\{1 + tg^2\ \varphi\right\} \quad \text{of} \quad c = \frac{a-b}{cos\ \varphi} \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Men kan ook $cos$ C door $2\,cos^2 \frac{1}{2} C - 1$ vervangen, waardoor er komt
$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\,cos^2 \tfrac{1}{2} C,$$

en stellen hierin $\quad sin^2\ \psi = \dfrac{4ab\,cos^2 \frac{1}{2} C}{(a+b)^2}$,

$$\text{of} \qquad sin\ \psi = \frac{2\,cos \frac{1}{2} C}{a+b} \sqrt{ab},$$

welk gebroken voor den hoek $\psi$ steeds eene bestaanbare waarde zal opleveren, uithoofde $a + b$ altijd $> 2\sqrt{ab}$ zijnde, des te meer

$$a + b > 2\,cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{ab} \text{ zal zijn.}$$

Hieruit volgt alzoo

$$c^2 = (a+b)^2\ (1 - sin^2\ \psi) \quad \text{of} \quad c = (a+b)\,cos\ \psi \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 8970{,}432$, $b = 7690{,}548$ en $C = 119^\circ\ 36'\ 45''$.

*Berekening.*

$a = 8970{,}432$
$b = 7590{,}548$
$a + b = 16660{,}980$
$a - b = 1279{,}884$
$C = 119^\circ\ 36'\ 45''$
$\frac{1}{2} C = 59^\circ\ 48'\ 22'',5$

$log\ (a+b) = 4{,}2217006$
$log\ (a-b) = 3{,}1071706$ *afg.*
$1{,}1145300$
$log\ tg \frac{1}{2} C = 0.2351756$
$log\ tg\ (B + \frac{1}{2} C) = 1{,}3497056$
$B + \frac{1}{2} C = 87^\circ\ 26'\ 26'',31$
$\frac{1}{2} C = 59^\circ\ 48'\ 22'',5$
$B = 27^\circ\ 38'\ 3'',88$
$B + C = 147^\circ\ 14'\ 48'',88$
$A = 32^\circ\ 45'\ 11'',12$

Dit is altijd waar mits men absoluut bewijst
Toon slechts aan $\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$
Het eerste voor is de rekenk. middenevenredige, de 2de de meetkundige middenevenredige. Construeer de beide meetkundig dan is $\frac{1}{2}(a+b)$ de straal van de cirkel en $\sqrt{ab}$ de hoogte eener opgerichte lit op de Cirkel omtrek, en deze is altijd kleiner dan de straal.

26/9 06.

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}8859574 \\ \log \sin C &= 9{,}9392132 \\ \hline &\;\; 3{,}8251706 \text{ opg.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin B &= 9{,}6663571 \\ \hline \log c &= 4{,}1588135 \text{ afg.} \\ c &= 14414{,}96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}9528134 \\ \log \sin C &= 9{,}9392132 \\ \hline &\;\; 3{,}8920266 \text{ opg.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin A &= 9{,}7331132 \\ \hline \log c &= 4{,}1588134 \text{ afg.} \\ c &= 14414{,}96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (a+b) &= 4{,}2217006 \\ \log \sin \tfrac{1}{2} C &= 9{,}9366795 \\ \hline &\;\; 4{,}1583801 \text{ opg.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin (B + \tfrac{1}{2} C) &= 9{,}9995666 \\ \hline \log c &= 4{,}1588135 \text{ afg.} \\ c &= 14414{,}96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (a-b) &= 3{,}1071706 \\ \log \cos \tfrac{1}{2} C &= 9{,}7015038 \\ \hline &\;\; 2{,}8086744 \text{ opg.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos (B + \tfrac{1}{2} C) &= 8{,}6498607 \\ \hline \log c &= 4{,}1588137 \text{ afg.} \\ c &= 14414{,}97 \end{aligned}$$

**Deze drie verschillende wijzen van berekenen der zijde $c$, stemmen in de uitkomsten vrij juist met elkander overeen. Wij zullen die zijde thans ten overvloede nog met behulp der form. ($\beta$) gaan berekenen.**

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}9528134 \\ \log b &= 3{,}8859574 \\ \hline &\;\; 7{,}8387708 \text{ opg.} \\ &\;\; 2 \overline{\phantom{0000000}} \\ \log \sqrt{ab} &= 3{,}9193854 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log \sin \tfrac{1}{2} C &= 9{,}9366795 \\ \hline &\;\; 4{,}1570949 \text{ opg.} \\ \log (a-b) &= 3{,}1071706 \\ \hline \log tg\, \varphi &= 1{,}0499243 \text{ afg.} \\ \varphi &= 84^\circ\, 54'\, 21'',9 \\ \log \cos \varphi &= 8{,}9483569 \\ \log (a-b) &= 3{,}1071706 \\ \hline \log c &= 4{,}1588137 \\ c &= 14414{,}97 \end{aligned}$$

**hetgeen met de vorige berekeningen overeenstemt. De toepassing der formule ($\gamma$) zij den leerling ter oefening overgelaten.**

**49. *Aanmerking.* Nademaal de hoeken eens driehoeks alleen afhankelijk zijn van de verhoudingen tusschen de drie zijden, zoo kan men het III**[de] **Geval ook aldus voorstellen. *Gegeven zijnde de***

*verhouding m van twee zijden a en b, benevens de ingesloten hoek* C, *te berekenen elk der beide overige hoeken* A *en* B.

Stellende alsdan $m = \frac{a}{b} = tg\ \alpha$, dan gaat de form. ($\alpha$) over in

$$tg\,(B + \tfrac{1}{2}C) = \left(\frac{tg\ \alpha + 1}{tg\ \alpha - 1}\right) tg\ \tfrac{1}{2}C = -\,tg\,(45^0 + \alpha)\ tg\ \tfrac{1}{2}C$$

of omdat

$$tg\,(A + \tfrac{1}{2}C) = -\,tg\,(B + \tfrac{1}{2}C),$$
$$tg\,(A + \tfrac{1}{2}C) = tg\,(45^0 + \alpha)\ tg\ \tfrac{1}{2}C,$$
$$\text{of}\quad tg\ \tfrac{1}{2}(B - A) = tg\,(45^0 - \alpha)\ cot\ \tfrac{1}{2}C;$$
$$B = \tfrac{1}{2}(B + A) + \tfrac{1}{2}(B - A) = 90^0 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(B - A),$$
$$A = \tfrac{1}{2}(B + A) - \tfrac{1}{2}(B - A) = 90^0 - \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(B - A),$$

waardoor de hoeken A en B gemakkelijk te berekenen zijn.

## IV^de GEVAL.

*Gegeven zijnde twee zijden a en b met een overstaanden hoek* A, *te berekenen de derde zijde c en de beide overige hoeken* B *en* C.

De verschillende gevallen van dubbelzinnigheid, bestaanbaarheid en onbestaanbaarheid, die zich in dit zoogenaamd *twijfelachtig* geval kunnen voordoen, zijn uitvoerig behandeld in bewerkers *Leerboek der Meetkunde*, I. § 4.

Voor de berekening der onbekende elementen neme men eerst de formule

$$a : b = sin\ A : sin\ B,$$

gevende

$$sin\ B = \frac{b\ sin\ A}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

waaruit volgt voor de bestaanbaarheid van B, dat

$$b\ sin\ A < a$$

moet zijn; bedenkt men hierbij, dat $b\ sin$ A de lengte is der loodlijn CD (fig. 10), die uit het hoekpunt C op de overstaande zijde wordt neêrgelaten, dan komt men op de meetkundige voorwaarde voor de bestaanbaarheid terug.

Uit de formule ($\alpha$) verkrijgt men twee waarden voor B, namelijk de hoek en zijn supplement, die beiden of een van beiden voldoen, naarmate zij overeenkomen met de betrekking, dat

$$\text{voor } b \gtrless a \qquad \text{ook } B \gtrless A.$$

De formule, die de betrekking tusschen de gegevens en de zijde $c$ aanwijst, is

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\text{of}\quad c^2 - 2bc\cos A - (a^2 - b^2) = 0,$$

gevende door oplossing volgens de gewone methode der vierkantsvergelijkingen:

$$c = b\cos A \pm \sqrt{(b^2\cos^2 A + (a^2 - b^2))}$$

$$= b\cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2\sin^2 A)} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Om haar voor de berekening met logarithmen geschikt te maken, schrijft men

$$c = b\cos A\left\{1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2\cos^2 A}\right)}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Is nu $a > b$, dan stelle men

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2\cos^2 A} = tang^2\,\alpha,$$

$$\text{dus}\quad tang\,\alpha = \frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{b\cos A},$$

zoo wordt

$$c = b\cos A\,\{1 \pm sec\,\alpha\}$$

of volgens de formulen (39) en (40) § 3

$$c = \begin{cases} b\cos A\,tang\,\alpha\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\alpha \\ -\,b\cos A\,tang\,\alpha\,tang\,\tfrac{1}{2}\,\alpha. \end{cases}$$

In deze formule zal altijd slechts ééne waarde positief zijn, namelijk de bovenste wanneer A scherp is, en de benedenste wanneer A stomp is, hetgeen weder geheel met de meetkundige beschouwing overeenkomt.

Is $a < b$, dus A scherp, dan stelle men

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2\cos^2 A} = sin^2\,\alpha' \quad\text{of}\quad sin\,\alpha' = \frac{\sqrt{(b+a)(b-a)}}{b\cos A}$$

hetgeen kan geschieden, omdat volgens vergelijking ($\alpha$)

$$b^2\sin^2 A < a^2,$$

$$\text{of}\quad b^2 - b^2\cos^2 A < a^2,$$

$$b^2 - a^2 < b^2\cos^2 A,$$

$$\text{dus}\quad \frac{b^2 - a^2}{b^2\cos^2 A} < 1.$$

Formule ($\gamma$) gaat nu over in

$$c = b\cos A\,(1 \pm \cos\alpha')$$

$$= \begin{cases} 2b\cos A\cos^2\tfrac{1}{2}\,\alpha' \\ 2b\cos A\sin^2\tfrac{1}{2}\,\alpha', \end{cases}$$

zoodat men in dit geval altijd twee positieve waarden verkrijgt.

De formule ($\beta$) kan ook onmiddellijk uit de figuur worden afgeleid.

Met heeft toch (fig. 10)

$$AD = b \cos A, \qquad CD = b \sin A$$

$$BD = B'D = \sqrt{(BC^2 - CD^2)} = \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 A)},$$

derhalve:

$$c = \frac{AB}{AB'} = AD \pm BD = b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 A)}.$$

Het is echter verkieslijk in dit geval van den gewonen weg af te wijken en van de formule ($\beta$) in het geheel geen gebruik te maken. Liever ga men aldus te werk.

Uit de formule ($\alpha$) berekent men eerst de waarde van B, beschouwt deze als bekend en gebruikt dan de formulen

$$C = 180^0 - (A + B),$$

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A} = a \frac{\sin (A + B)}{\sin A};$$

heeft men voor B twee bestaanbare waarden gevonden, dan substitueert men beide en vindt de overeenkomstige waarden van C en $c$, derhalve de twee driehoeken, die voldoen aan de gegevens.

*Voorbeeld.* Zij $a = 87{,}935$, $b = 539{,}076$, $A = 8^0\, 2'\, 49''$.

*Berekening.*

$\log \sin A = 9{,}1460797$

$\log a = 1{,}9441618$

$\log \frac{\sin A}{a} = 7{,}2019179$

$\log b = 2{,}7316501$

$\log \sin B = 9{,}9335680$

| | |
|---|---|
| $B = 59^0\, 6'\, 38''$ | $B = 59^0\, 6'\, 38''$ |
| | $B' = 180^0 - B = 120^0 53' 22''$ |
| $A = 8^0\, 2'\, 49''$ | $A = 8^0\, 2' 49''$ |
| $A + B = 67^0\, 9'\, 27''$ | $A + B' = 128^0 56' 11''$ |
| $C = 112^0 50'\, 33''$ | $C' = 51^0\, 3' 49''$ |
| $\log \sin C = 9{,}9645309$ | $\log \sin C' = 9{,}8908926$ |
| $\log \frac{\sin A}{a} = 7{,}2019179$ | $\log \frac{\sin A}{a} = 7{,}2019179$ |
| $\log c = 2{,}7626130$ | $\log c' = 2{,}6889747$ |
| $c = 578{,}9125$ | $c' = 488{,}624$ |

zoodat twee driehoeken aan de gegevens voldoen, tot elementen hebbende

$$\left\{\begin{array}{l} a = 87{,}935 \\ b = 539{,}076 \\ c = 578{,}9125 \\ \mathrm{A} = 8^\circ\ 2'\ 49'' \\ \mathrm{B} = 59^\circ\ 6'\ 38'' \\ \mathrm{C} = 112^\circ\ 50'\ 33'' \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a = 87{,}935 \\ b = 539{,}076 \\ c' = 488{,}624 \\ \mathrm{A} = 8^\circ\ 2'\ 49'' \\ \mathrm{B}' = 120^\circ\ 53'\ 22'' \\ \mathrm{C}' = 51^\circ\ 3'\ 49''. \end{array}\right.$$

## § 9.

### *Bepaling van inhouden.*

49*. In de eerste plaats zullen wij de formulen doen kennen, waardoor de inhoud eens driehoeks kan berekend worden uit elke drie bepalende elementen. Daartoe gaan wij uit van de bekende meetkundige eigenschap, dat de inhoud eens driehoeks gemeten wordt door het halve product van basis en hoogte, dat is (fig. 7), den inhoud van den driehoek ABC $=$ I stellende,

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}\ \mathrm{AC} \times \mathrm{BD}.$$

Nu is

$$\mathrm{BD} = \mathrm{AB}\ \sin\ \mathrm{A} = c\ \sin\ \mathrm{A}$$

derhalve

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}\ bc\ \sin\ \mathrm{A},$$

evenzoo vindt men

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}\ bc\ \sin\ \mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\ ac\ \sin\ \mathrm{B} = \tfrac{1}{2}\ ab\ \sin\ \mathrm{C} \quad . \ . \quad (1)$$

zoodat *de inhoud eens driehoeks gelijk is aan het halve product van twee zijden en den sinus van den ingesloten hoek.*

Schrijft men volgens formule (20) der voorgaande §

$$\sin\ \mathrm{A} = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

dan gaat (1) over in

$$\mathrm{I} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

waardoor wij de bekende fraaie formule voor den inhoud, uitgedrukt in de drie zijden, terug vinden.

Om den inhoud in eene zijde en twee hoeken uit te drukken, neemt men de evenredigheid

$$b : c = \sin\ \mathrm{B} : \sin\ (\mathrm{A} + \mathrm{B}),$$

gevende

$$b = c \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin (\mathrm{A} + \mathrm{B})};$$

en deze waarde in (1) overgebracht, volgt

$$I = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin (A + B)};$$

evenzoo

$$I = \tfrac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)} = \tfrac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin(A+C)} = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)} \quad . . (3)$$

Om in het twijfelachtige geval den inhoud in de gegevens uit te drukken, neme men formule ($\beta$) van het vierde geval, zijnde

$$c = b \cos A \pm \surd(a^2 - b^2 \sin^2 A)$$

en substitueert deze in (1), dan komt

$$I = \tfrac{1}{2} b \sin A \left\{ b \cos A \pm \surd(a^2 - b^2 \sin^2 A) \right\} \quad . . . (4)$$

welke formule de dubbele waarde voor den inhoud oplevert, en op de in het IV$^{de}$ Geval behandelde manier voor de berekening geschikt kan gemaakt worden.

Eenvoudiger is het ook hier}, eerst de hoeken B en C door de sinus-formule te berekenen en en daarna den inhoud volgens formule (3).

Stellen wij in de voorgaande formulen $C = 90^\circ$, dan verkrijgen wij voor den rechthoekigen driehoek

$$I = \tfrac{1}{2} ab = \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{tang} A = \tfrac{1}{4} c^2 \sin 2A \quad . . (5)$$

50. Zij (fig. 11) ABCD een parallelogram, AC en BD de diagonalen, dan is

$$I . \triangle ABC = \tfrac{1}{2} AB . BC \sin B,$$

derhalve

$$I . \text{parall. } AC = AB . BC \sin B \quad . . . . (6)$$

dat is: *de inhoud van een parallelogram is gelijk aan het product van de ongelijke zijden en den sinus van den tusschengelegen hoek.*

Stelt men $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, dan wordt

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A,$$
$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A,$$

door welke formulen de diagonalen uit de zijden en een der hoeken kunnen berekend worden. Door optelling geven zij

$$AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$$

waardoor wij terugkomen op de bekende meetkundige eigenschap, dat de som van de vierkanten der diagonalen gelijk is aan/de som van de vierkanten der zijden. (*Meetkunde*, I. § 13.)

Volgens eene bekende meetkundige eigenschap (*Meetkunde*, I. § 24) is de inhoud van elken vierhoek gelijk aan de helft van

den inhoud van het parallelogram beschreven op de diagonalen, derhalve *is de inhoud van elken vierhoek gelijk aan het halve product der diagonalen en den sinus van den hoek, dien zij met elkander maken.*

51. Zij AB (fig. 12) de zijde van een regelmatigen $n$ hoek, N het middelpunt van den omgeschreven cirkel, dan is $\angle$ AMB $= \frac{360^0}{n}$. Stellen wij de zijde AB $= a$, den straal AM $= r$, dan is in driehoek AMB:

$$a = r \; koorde \frac{360^0}{n} = 2r \sin \frac{180^0}{n},$$

waardoor elke der drie grootheden $a$, $r$, $n$, uit de beide anderen kan berekend worden.

Verder is

$$I . \triangle AMB = \tfrac{1}{2} r^2 \sin \frac{360^0}{n} = \tfrac{1}{4} a^2 \cot \frac{180^0}{n},$$

derhalve

$$I . \textit{regelm. n-hoek} = \tfrac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^0}{n} = \tfrac{1}{4} na^2 \cot \frac{180^0}{n}, \quad . \quad (7)$$

door welke formule de inhoud van elken regelm. veelhoek uit den straal of uit de zijde kan gevonden worden.

Ook de inhoud van een cirkelsegment kan in eene formule worden uitgedrukt.

Men heeft toch (fig. 12),

$$I \; segm. \; ABC = I . \; sector \; AMB - I . \triangle AMB,$$

of $\quad I \; segm. = \tfrac{1}{2} r^2 \varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \sin \varphi = \tfrac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin \varphi) \quad . \quad (8)$

waarin $\varphi$ de lengte van den cirkelboog met den straal $= 1$, behoorende bij hoek M, voorstelt. Mocht de hoek in graden zijn gegeven, dan is

$$\varphi = \frac{M}{180^0} \pi.$$

Indien de pijl $p$ van het segment gegeven is, zal men daaruit den hoek kunnen berekenen door de formule

$$\varphi = 2Bg . \cos \left(\frac{r - p}{r}\right).$$

Omgekeerd uit verg. (8) voor gegeven I de waarde van $\varphi$ te bepalen, behoort tot de hoogere deelen der wiskunde, omdat zoowel een hoek als een goniometrische grootheid in de vergelijking voorkomt.

Aan den leerling zij overgelaten de oplossing van het vraag-

stuk, om den inhoud te bepalen van het gedeelte dat twee cirkelvlekken gemeen hebben, wanneer de stralen en de afstand der middelpunten bekend zijn.

## § 10.

*Oplossing van vraagstukken, die betrekking hebben op eenige bijzondere gevallen van driehoeksmeting.*

52. I[ste] VRAAGSTUK. *Van een driehoek gegeven zijnde eene zijde benevens de som of het verschil der beide overige zijden, en de overstaande hoek, de onbekende zijden en hoeken te vinden.*

II[de] VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde eene zijde benevens de som of het verschil der beide overige zijden, en het verschil der aanliggende hoeken, den driehoek op te lossen.*

De oplossing dezer beide vraagstukken is vervat in de reeds hiervoor (n° 40) gevondene evenredigheden

$$a + b : c = \cos \tfrac{1}{2} (A - B) : \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$a - b : c = \sin \tfrac{1}{2} (A - B) : \cos \tfrac{1}{2} C,$$

die voor het 1[ste] vraagstuk geven

$$\cos \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{(a + b)}{c} \sin \tfrac{1}{2} C,$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{(a - b)}{c} \cos \tfrac{1}{2} C;$$

derhalve $A = 90° - \tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2} (A - B)$,

en $B = 90° - \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} (A - B)$,

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \qquad b = \frac{c \sin B}{\sin C},$$

terwijl men voor het 2[de] vraagstuk heeft

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \frac{b}{a + b} \cos \tfrac{1}{2} (A - B),$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \frac{c}{a - b} \sin \tfrac{1}{2} (A - B);$$

waardoor weder de onbekende hoeken en zijden kunnen berekend worden.

53. III[de] VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee zijden benevens het verschil der overstaande hoeken, den driehoek op te lossen.*

IV[de] VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee hoeken met de som of het verschil der overstaande zijden, den driehoek op te lossen.*

De oplossing dezer beide vraagstukken is begrepen in de formule

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ (A - B) = \frac{a-b}{a+b}\ cot\ \tfrac{1}{2}\ C,$$

waaruit voor het eerste volgt

$$tg\ \tfrac{1}{2}\,C = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\ cot\ \tfrac{1}{2}\ (A - B),$$

$$c = \frac{a\ sin\ C}{sin\ A} = \frac{b\ sin\ C}{sin\ B},$$

en voor het tweede

$$a - b = (a+b)\ tg\ \tfrac{1}{2}\ C\ .\ tg\ \tfrac{1}{2}\ (A - B),$$

$$a + b = \frac{(a-b)\ cot\ \tfrac{1}{2}\,C}{tg\ \tfrac{1}{2}\ (A-B)} = (a-b)\ \frac{tg\ \tfrac{1}{2}\ (A+B)}{tg\ \tfrac{1}{2}\ (A-B)},$$

$$a = \tfrac{1}{2}\ (a+b) + \tfrac{1}{2}\ (a-b),$$

$$b = \tfrac{1}{2}\ (a+b) - \tfrac{1}{2}\ (a-b).$$

54. V^de^ Vraagstuk. *Gegeven zijnde een der hoeken A en B met eene aanliggende zijde c, benevens de som of het verschil der beide overige zijden, den driehoek op te lossen.*

Hiertoe geven de evenredigheden (21) en (22) § 8 terstond

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ B = \left(\frac{a+b-c}{a+b+c}\right)\ cot\ \tfrac{1}{2}\ A,$$

en $tg\ \tfrac{1}{2}\ B = \frac{c-(a-b)}{c+(a-b)}\ tg\ \tfrac{1}{2}\ A,$

waardoor dus ook de hoek C bepaald wordt, en vervolgens elke der onbekende zijden $a$ en $b$, door de formulen

$$a = \frac{c\ sin\ A}{sin\ C}, \qquad b = \frac{c\ sin\ B}{sin\ C}.$$

55. VI^de^ Vraagstuk. *Gegeven zijnde de drie hoeken met eene der zijden, de stukken te berekenen, waarin deze zijde door de loodlijn, uit het overstaande hoekpunt vallende, verdeeld wordt.*

*Oplossing.* Zij $b$ de gegeven zijde. Door het vermenigvuldigen der evenredigheden:

$$c + a : b = cos\ \tfrac{1}{2}\ (C - A) : sin\ \tfrac{1}{2}\ B,$$

$$c - a : b = sin\ \tfrac{1}{2}\ (C - A) : cos\ \tfrac{1}{2}\ B,$$

verkrijgt men $c^2 - a^2 : b^2 = sin\,(C - A) : sin\ B.$

Stellende het verschil der te bepalen stukken AD, DC (fig. 7) $= x$, dan is, volgens eene bekende eigenschap des driehoeks:

$$bx = c^2 - a^2,$$

*

$$\text{dus} \quad x = \frac{c^2 - a^2}{b} = \frac{b \sin(C - A)}{\sin B},$$

$$AD = \tfrac{1}{2}(b + x) = \tfrac{1}{2} b \left\{ \frac{\sin B + \sin(C - A)}{\sin B} \right\}$$

$$= \frac{b}{\sin B} \sin\left(\frac{B + C - A}{2}\right) \cos\left(\frac{A + B - C}{2}\right) = b \frac{\sin C \cos A}{\sin B}.$$

Evenzoo

$$DC = \tfrac{1}{2}(b - x) = b \frac{\sin A \cos C}{\sin B},$$

welke uitkomsten ook meer rechtstreeks uit de rechthoekige driehoeken ABD, BDC af te leiden zijn. De eerste geeft namelijk

$$AD = c \cos A = b \frac{\sin C}{\sin B} \cos A,$$

en de tweede

$$CD = a \cos C = b \frac{\sin A}{\sin B} \cos C.$$

56. VII^de^ VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee zijden met den ingesloten hoek, de deelen te berekenen, waarin die hoek door de loodlijn op de derde zijde neêrgelaten, verdeeld wordt.*

*Oplossing.* Men stelle (fig. 7) $ABD = p$, $DBC = q$, dan is

$$ABD + BAD = DBC + BCD,$$

$$\text{dus} \quad A - C = DBC - ABD = q - p.$$

Nu is, naar aanleiding van form. (8) § 8

$$tg\, \tfrac{1}{2}(C - A) = \left(\frac{c - a}{c + a}\right) \cot \tfrac{1}{2} B,$$

$$\text{dus ook} \quad tg\, \tfrac{1}{2}(p - q) = \left(\frac{c - a}{c + a}\right) \cot \tfrac{1}{2} B,$$

waardoor, omdat $p + q$ gegeven is, $p$ en $q$ elk afzonderlijk kunnen bepaald worden. Indien tevens gevraagd wordt, de lengte der loodlijn BD te berekenen, zoo kan men daartoe op de volgende wijze eene formule vinden.

Zij $PD = x$ en $\tfrac{1}{2}(p - q) = \delta$, dus $p = \tfrac{1}{2} B + \delta$, $q = \tfrac{1}{2} B - \delta$.

Nu is

$$Inh.\ ABD = \tfrac{1}{2} cx \sin(\tfrac{1}{2} B + \delta),$$

$$Inh.\ BDC = \tfrac{1}{2} ax \sin(\tfrac{1}{2} B - \delta),$$

$$\text{en} \quad Inh.\ ABC = \tfrac{1}{2} ac \sin B.$$

Derhalve

$$cx \sin(\tfrac{1}{2} B + \delta) + ax \sin(\tfrac{1}{2} B - \delta) = ac \sin B,$$

dat is, na ontwikkeling

$$x\left\{(c+a)\sin\tfrac{1}{2}B\cos\delta+(c-a)\cos\tfrac{1}{2}B\sin\delta\right\}=ac\sin B,$$

of $$x\cos\delta\left\{1+\frac{c-a}{c+a}\cot\tfrac{1}{2}B\,tg\,\delta\right\}=\frac{2ac}{c+a}\cos\tfrac{1}{2}B,$$

Hierin voor $\left(\frac{c-a}{c+a}\right)\cot\frac{1}{2}B$ de hiervoor gevondene waarde, namelijk $tg\,\delta$, substitueerende, zoo komt er

$$x\cos\delta(1+tg^2\delta)=\frac{2ac}{c+a}\cos\tfrac{1}{2}B,$$

of $$x=\frac{2ac}{a+c}\cos\tfrac{1}{2}B\cos\delta.$$

Door de hoeken $p$ en $q$ als bekend aan te nemen, vindt men de gevraagde loodlijn onmiddellijk door eene der beide formulen.

$$x=a\cos q,\qquad x=c\cos p.$$

57. VIII[ste] VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde eene zijde met de beide aanliggende hoeken, de stukken te berekenen, waarin die zijde verdeeld wordt door eene lijn, die den overstaanden hoek midden doordeelt.*

*Oplossing.* Laat de lijn CD (fig. 13) den hoek C midden door deelen. Nu is, volgens eene eigenschap dezer lijn,

$$AC : BC = AD : BD$$

of $$a+b : a-b = c : BD - AD;$$

maar $$a+b : a-b = tg\tfrac{1}{2}(A+B) : tg\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Derhalve $$BD - AD = c\times\frac{tg\frac{1}{2}(A-B)}{tg\frac{1}{2}(A+B)},$$

en $$BD=\frac{c}{2}\left\{1+\frac{tg\frac{1}{2}(A-B)}{tg\frac{1}{2}(A+B)}\right\}$$

$$AD=\frac{c}{2}\left\{1-\frac{tg\frac{1}{2}(A-B)}{tg\frac{1}{2}(A+B)}\right\}.$$

De lijn CD kan vervolgens berekend worden, hetzij uit den driehoek ACD, hetzij uit den driehoek BCD, door eene der twee evenredigheden

$$BD : CD = \sin\tfrac{1}{2}C : \sin B,$$
$$AD : CD = \sin\tfrac{1}{2}C : \sin A,$$

dus $$CD = BD\times\frac{\sin B}{\sin\frac{1}{2}C} = AD\times\frac{\sin A}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

Wanneer echter de lengte der stukken BD, AD niet behoeft bepaald te worden, zal het gemakkelijker zijn de lijn CD aldus te berekenen.

Stellende de lengte dezer lijn $= x$, dan heeft men

$$Inh.\ ACD = \tfrac{1}{2}\, bx \sin \tfrac{1}{2}\, C,$$
$$Inh.\ BCD = \tfrac{1}{2}\, ax \sin \tfrac{1}{2}\, C.$$

Maar $$Inh.\ ABC = \tfrac{1}{2}\, ab \sin \tfrac{1}{2}\, C.$$

Derhalve $(a + b)\, x \sin \tfrac{1}{2} C = ab \sin C = 2\, ab \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} C$,
waaruit volgt

$$x = \frac{2ab}{a+b} \cos \tfrac{1}{2} C.$$

Verder is $\quad x = \dfrac{c \sin A}{\sin C}\quad$ en $\quad b = \dfrac{c \sin B}{\sin C}$,

en deze waarden in de formule voor $x$ substitueerende, komt er

$$x = \frac{2c \sin A \sin B \cos \tfrac{1}{2} C}{(\sin A + \sin B) \sin C} = \frac{c \sin A \sin B}{\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)} \times \frac{\cos \tfrac{1}{2} C}{\sin C}$$
$$= \frac{c \sin A \sin B}{\cos \tfrac{1}{2}(A - B) \sin C};$$

welke uitdrukking men ook had kunnen verkrijgen, door in de bovenstaande vergelijking

$$(a + b)\, x \sin \tfrac{1}{2} C = ab \sin C,$$

voor $(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C$ te schrijven $c \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$.

58. IX[de] VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee zijden met den ingesloten hoek, de deelen te bepalen waarin die hoek verdeeld wordt door eene lijn, die de overstaande zijde middendoor deelt.*

*Oplossing.* Men onderstelle in fig. 13, dat $AD = DB$, voorts $ACD = p$, $BCD = q$ zij, dan geven de driehoeken ACD, BCD

$$CD : AD = \sin A : \sin ACD = \sin A : \sin p$$
$$CD : BD = \sin B : \sin BCD = \sin B : \sin q$$

dus $$\sin p : \sin q = \sin A : \sin B = a : b,$$

en $$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{a + b}{a - b}.$$

$$\frac{tg \tfrac{1}{2}(p + q)}{tg \tfrac{1}{2}(p - q)} = \frac{a + b}{a - b},$$

waaruit volgt $$tg \tfrac{1}{2}(p - q) = \frac{a - b}{a + b}\, tg \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$p = \tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2}(p - q), \qquad q = \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2}(p - q).$$

Men kan echter de hoeken $p$ en $q$ ook onmiddellijk uit de hoeken des driehoeks bepalen. Immers, aangezien

$$\frac{a - b}{a + b} = tg \tfrac{1}{2}(A - B)\ tg \tfrac{1}{2} C,$$

zoo heeft men

$$tg\ \tfrac{1}{2}(p-q) = tg^2\ \tfrac{1}{2}C\ tg\ \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Wil men hierbij tevens de lengte der deellijn CD berekenen, zoo zoude men, na vooraf de derde zijde $c$, benevens de overige hoeken A en B bepaald te hebben, zich hiertoe van eene der bovenstaande evenredigheden

$$\sin q : \sin B = \tfrac{1}{2}c : CD,$$
$$\sin p : \sin A = \tfrac{1}{2}c : CD,$$

kunnen bedienen.

Er bestaat echter nog eene andere oplossing ter bepaling van de lengte der deellijn CD. Men stelle namelijk deze lengte $= x$ en kortheidshalve $\tfrac{1}{2}(p-q) = \delta$, dus

$$p = \tfrac{1}{2}C + \delta \quad \text{en} \quad q = \tfrac{1}{2}C - \delta.$$

De driehoeken ACD, BCD geven volgens form. (15)

$$AD^2 = x^2 + b^2 - 2bx\cos p$$
$$BD^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos q,$$

waaruit door aftrekking volgt,

$$a^2 - b^2 = 2x(a\cos q - b\cos p) = 2x\left\{a\cos(\tfrac{1}{2}C-\delta) - b\cos(\tfrac{1}{2}C+\delta)\right\}$$
$$= 2x\left\{(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C\cos\delta + (a+b)\sin\tfrac{1}{2}C\sin\delta\right\}$$

of $$\frac{a+b}{2} = x\cos\tfrac{1}{2}C\cos\delta.\left\{1+\frac{a+b}{a-b}\,tg\ \tfrac{1}{2}C\ tg\ \delta\right\}.$$

Maar volgens ($\alpha$) is

$$\frac{a+b}{a-b}\,tg\ \delta = tg\ \tfrac{1}{2}C,$$

en hierdoor herleidt zich de vorige vergelijking tot de meer eenvoudige

$$\frac{a+b}{2} = x\cos\tfrac{1}{2}C\cos\delta\left\{1+tg^2\tfrac{1}{2}C\right\} = \frac{x\cos\delta}{\cos\tfrac{1}{2}C}.$$

Dus $$x = \tfrac{1}{2}(a+b)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}(p-q)},$$

in welke formule het halve verschil der hoeken $p$ en $q$ reeds uit ($\alpha$) bekend is.

Zie hier nog eene andere wijze om tot dezelfde uitkomst te geraken. Men heeft namelijk

$$Inh.\ drieh.\ BCD = \tfrac{1}{2}ax\sin q,$$
$$Inh.\ drieh.\ ACD = \tfrac{1}{2}bx\sin p,$$
$$Inh.\ drieh.\ ABC = \tfrac{1}{2}ab\sin C.$$

Derhalve $$x(a\sin q + b\sin p) = ab\sin C,$$

Maar uit de hiervoor gevondene evenredigheid

$$a : c = \sin p : \sin q,$$

volgt

$$a \sin q = b \sin p,$$

en

$$(a + b) \sin q = b (\sin p + \sin q).$$

Derhalve

$$x = \frac{ab \sin C}{a \sin q + b \sin p} = \frac{b \sin C}{2 \sin q} = \frac{(a + b) \sin C}{2(\sin p + \sin q)} = \frac{\frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (p - q)},$$

even als hierboven.

## § 11.

*Toepassing der driehoeksmeting op eenige vraagstukken tot de toegepaste meetkunde behoorende.*

59. De middelen, waarvan men zich in de toegepaste meetkunde bij het opmeten ven eenig terrein bedient, tot het bepalen van hoogten, afstanden en richtingen der verschillende voorwerpen, bestaan hoofdzakelijk in meetstaven en kettingen voor het meten van afstanden, en in werktuigen bestemd tot het meten van hoeken, zoo als de sextant, het astrolabium, de graphometer, de theodoliet, de repetitie-cirkel van Borda, en andere van gelijken aard. Het behoort niet tot het doel van dit werkje, aangaande het gebruik dezer toestellen in eenige bijzonderheden te treden. Bij gebrek van mondeling onderricht hieromtrent, zal men de werken, die opzettelijk daarover handelen, dienen te raadplegen. Wij moeten ons dan hier bepalen tot het voordragen van enkele belangrijke vraagstukken, die betrekking hebben op de toepassing der meetkunde op de geodesie, en waarin de hiervoren gevondene formulen der driehoeksmeting een nuttig gebruik zullen vinden.

### *A.* Het bepalen van hoogten.

60. Om de hoogte van een verheven voorwerp AB (fig. 14) (een toren, zuil, enz.), dat tot aan den voet genaakbaar is, te bepalen, is de volgende handelwijze de eenvoudigste.

Op zekeren afstand b. v. in C plaatst men een baken CC′, wiens hoogte $h$ bekend is, meet den afstand CB en den hoek AC′B′, die de lijn naar den top des torens met de horizontale lijn C′B′ maakt.

61 De praktische Meetkunde.

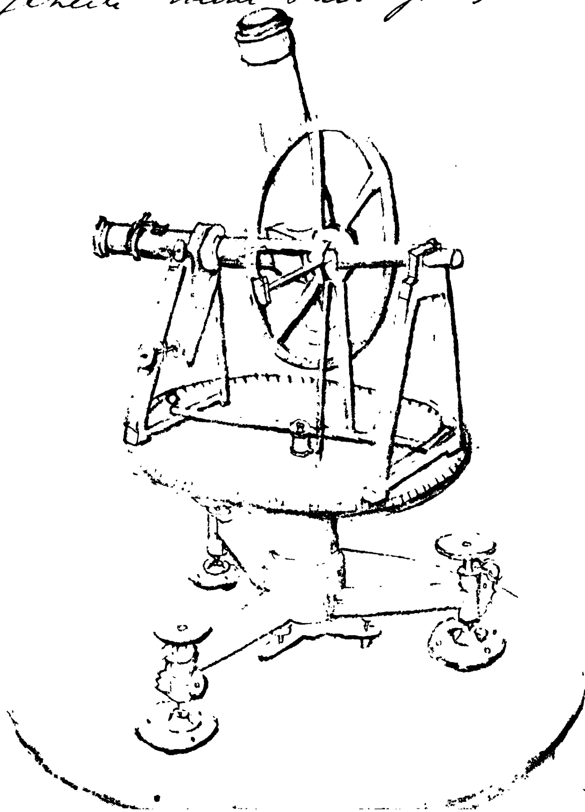
De praktische meetkunde (Topographie, Landmeetkunde, Geodesie) kwam in Egypte de zuivere Meetkunde is ontstaan.
Zij heeft ten doel, de onderlinge ligging der plaatsen van een landstreek te bepalen, gedeeltelijk met het doel om de grootte der landerijen en te bepalen, gedeeltelijk voor het maken van plannen en Kaarten.
De plaatsen worden door Signalen (palen, staven, stangen, steenen, torens) aangewezen.
Voor het meten van afstanden gebruikt men 2 houten Meetlatten van 3 of 4 M. lengte, die beurtelings achter elkander gelegd worden. Bij zeer nauwkeurige metingen noodzakelijk, dan gebruikt men Meetstangen van metaal, die horizontaal op schragen worden gelegd en welker kleine afstand telkens door een meetwig gemeten wordt.
Voor het horizontaal plaatsen gebruikt men een luchtbelwaterpas.
Voor het opmeten van een land is het noodzakelijk de lengte van de basis zoo nauwkeurig mogelijk te bepalen, die men ongeveer 10 K.M. lang neemt. Van de uiteinden dezer standlijn worden de hoeken bepaald, die zij maakt met de vizierlijnen naar andere punten en van uit deze weer de hoeken naar andere punten. Zoo ontstaat een net van driehoeken der eerste orde, over het land, wier zijden de een, twee, drie dubbele lengte der basis hebben en waaraan dan driehoeken van de tweede en derde orde aansluiten, die kleinere zijden bezitten.

Standlijn

Ter plaatsbepaling der ligging der net-punten gebruikt men hunne Coordinaten t/o van de Meridiaan en Parallel Cirkel van de sterrenwacht van het bepaalde land, die men door berekening dan vindt.
Van de aldus bepaalde punten sluiten dan de metingen met Meetlatten en Kruishoofden om de kleinere afstanden aan.

L.O.Z.

Voor Hoekmeetinstrument gebruikt men de Theodoliet.
Deze bestaat uit een Cirkelvormige Schijf, Alhidade, die met een luchtbelwaterpas met behulp van 3 stelschroeven horizontaal gesteld wordt en dan om een vertikale as draaibaar is.
De grootte der draaiing van deze Schijf wordt afgelezen op een haar omgevenden rand, Limbus, die van een Cirkeldeeling is voorzien, met behulp van Noniën.
Men leest dus een horizontale hoek af.
Aan deze Schijf is verder bevestigd een horizontale as, waaraan een verrekijker en een tweede verdeelde cirkel is verbonden, de Vertikaal- of Hoogtecirkel, waarvan de nonius bevestigd is aan de horizontale as (eigenlijk aan de „Lager der Asse"). Deze Cirkel dient voor de meting van Hoogtehoeken (hellingen) bij trigonometrische Hoogtebepaling.
Om de verrekijker horizontaal te stellen is ook deze van een luchtbelwaterpas voorzien.
Het geheele toestel staat op een [illegible] drievoet.



Zij $\quad CB = C'B' = a, \quad \llcorner ACB' = \alpha, \quad AB = x,$
dan is in den rechthoekigen driehoek AC'B'

$$AB' = a \, tang \, \alpha$$

of, omdat $\quad AB = AB' + BB' = AB' + CC'$

$$x = a \, tang \, \alpha + h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

door welke formule de gevraagde hoogte kan berekend worden.

Is de voet van het voorwerp ongenaakbaar, maar kan toch de meting in de richting van den voet geschieden, dan plaatst men twee bakens van gelijke hoogte CC' en DD', zoodanig, dat zij met den voet in eene rechte lijn liggen, met den afstand CD der bakens en de hoeken AC'B' en AD'B'. Stellende

$$CC' = DD' = BB' \pm h, \quad CD = a, \quad AB = x,$$
$$\llcorner AC'B' = \alpha, \qquad \llcorner AD'B' = \beta,$$

dan is in $\triangle$ AC'D'

$$\frac{AC'}{sin \, \beta} = \frac{AD'}{sin \, \alpha} = \frac{C'D'}{sin \, (\beta - \alpha)},$$

waaruit volgt

$$AC' = a \frac{sin \, \beta}{sin \, (\beta - \alpha)}, \qquad AD' = a \frac{sin \, \alpha}{sin \, (\beta - \alpha)}.$$

De gevraagde hoogte wordt nu gevonden door de formule

$$x = AC' \, sin \, \alpha + h = AD' \, sin \, \beta + h = a \frac{sin \, \alpha \, sin \, \beta}{sin \, (\beta - \alpha)} + h \quad . \quad (2)$$

terwijl tevens de afstanden der bakens tot den voet des torens worden berekend door de formulen

$$C'B' = AC' \, cos \, \alpha = a \frac{sin \, \beta \, cos \, \alpha}{sin \, (\beta - \alpha)},$$

$$D'B' = AD' \, cos \, \beta = a \frac{sin \, \alpha \, cos \, \beta}{sin \, (\beta - \alpha)}.$$

Formule (2) kan ook op de volgende wijze afgeleid worden.

In $\triangle$ AC'B' is

$$B'C' = AB' \, cot \, \alpha,$$

en in $\triangle$ AD'B'

$$BD' = AB' \, cot \, \beta,$$

derhalve

$$a = B'C' - B'D' = AB' \, (cot \, \alpha - cot \, \beta),$$

gevende

$$AB' = \frac{a}{cot \, \alpha - cot \, \beta} = a \frac{sin \, \alpha \, sin \, \beta}{sin \, (\beta - \alpha)},$$

derhalve

$$x = a \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} + h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Voor $p = 90^\circ$ gaat (2) over in

$$x = a \, tang \, \alpha + h,$$

zijnde weder formule (1) en werkelijk valt in deze onderstelling de tweede baken DD' samen met den voet van het te meten voorwerp.

*Voorbeeld.* Zij $a = 89^m.7$, $h = 1^m.5$,

$$\alpha = 34^\circ \, 3' \, 30'', \quad \beta = 56^\circ \, 17' \, 10'';$$

men zal vinden

$$AB = 112^m,595.$$

61. Is de voet van het voorwerp ongenaakbaar en kan de meting niet in de richting van den voet plaats grijpen, dan kan men den volgenden weg inslaan.

Men plaatst in eene willekeurige richting twee bakens C en D (fig. 15), waarvan de afstand gemeten wordt. (De hoogte der bakens zullen wij hier en in het vervolg buiten rekening laten, daar zij, zooals wij gezien hebben, slechts bij de berekende hoogte behoeft opgeteld te worden, om de werkelijke hoogte van het voorwerp te verkrijgen). Uit elk der bakens meet men vervolgens den hoek, waaronder de toren wordt gezien en den hoek tusschen den top des torens en den anderen baken, dan heeft men een voldoend aantal gegevens om de gevraagde hoogte te berekenen.

Zij namelijk

$CD = a$, $AB = x$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, $\angle ADB = \alpha'$, $\angle ADB = \beta'$.

dan is in $\triangle$ ACD

$$\frac{AC}{\sin \beta'} = \frac{AD}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin (\beta + \beta')},$$

derhalve

$$AC = a \frac{\sin \beta'}{\sin (\beta + \beta')}, \qquad AD = a \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \beta')}.$$

Verder volgt uit de rechthoekige driehoeken ACB en ADB

$$AB = AC \sin \alpha = AD \sin \alpha'$$

of

$$x = a \frac{\sin \alpha \sin \beta'}{\sin (\beta + \beta)} = a \frac{\sin \alpha' \sin \beta}{\sin (\beta + \beta')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit deze uitkomst blijkt, dat de gemeten hoeken onderling niet

onafhankelijk zijn, maar tusschen hen de betrekking bestaat

$$\sin\alpha \sin\beta' = \sin\alpha' \sin\beta,$$

welke uit de figuur ook gemakkelijk kan afgeleid worden. Daardoor zou men van de vier hoeken slechts drie behoeven te meten en den vierden kunnen berekenen, doch het is beter al de hoeken te meten en de betrekking als verificatie voor de juistheid der meting te gebruiken.

De afstanden van de bakens tot het voorwerp worden gegeven door de formulen

$$CB = AC \cos\alpha = a \frac{\cos\alpha \sin\beta'}{\sin(\beta + \beta')},$$

$$DB = AD \cos\alpha' = a \frac{\cos\alpha' \sin\beta}{\sin(\beta + \beta')}.$$

62. Onder dezelfde omstandigheden kan de bepaling van de hoogte ook op de volgende wijze geschieden.

Men plaatst in eene willekeurige horizontale rechte lijn drie bakens C, D, E (fig. 16), waarvan de onderlinge afstanden worden gemeten; vervolgens meet men de hoeken, waaronder het voorwerp AB uit de bakens wordt gezien. Zij

$$CD = a,\ DE = b,\ \angle ACB = \alpha,\ \angle ADB = \beta,\ \angle AEB = \gamma,$$

en laat men uit B eene loodlijn BF op CE neêr, dan is in de driehoeken CBD en DBE:

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 + 2CD.DF,$$
$$BE^2 = DE^2 + BD^2 - 2DE.DF,$$

of omdat

$$CB = x \cot\alpha,\ DR = x \cot\beta,\ EB = x \cot\gamma,$$
$$x^2 \cot^2\alpha = a^2 + x^2 \cot^2\beta + 2a\,DF,$$
$$x^2 \cot^2\gamma = b^2 + x^2 \cot^2\beta - 2b\,DF;$$

en hieruit DF elimineerende, komt er

$$x^2 (b \cot^2\alpha + a \cot^2\gamma) = (a+b)\, x^2 \cot^2\beta + ab\,(a+b);$$

gevende

$$x = \sqrt{\frac{ab(a+b)}{b \cot^2\alpha - (a+b)\cot^2\beta + a\cot^2\gamma}} \quad . \quad . \quad (4)$$

Opdat deze uitdrukking bestaanbaar zij, moet de noemer positief zijn en dit kan altijd verkregen worden door $\beta$ grooter te nemen dan $\alpha$ en $\gamma$. Daartoe moet deze hoek het dichtst bij, dus $\alpha$ en $\gamma$ ter wederzijde van de loodlijn BF gelegen zijn. Op de volgende wijze kan formule (4) voor de berekening met logarithmen geschikt gemaakt worden.

Schrijft men haar in den vorm

$$x^2 = \frac{ab(a+b)}{a(cot^2\gamma - cot^2\beta) + b(cot^2\alpha - cot^2\beta)}$$

$$= \frac{ab(a+b)}{a(cot\,\gamma + cot\,\beta)(cot\,\gamma - cot\,\beta) + b(cot\,\alpha + cot\,\beta)(cot\,\alpha - cot\,\beta)}$$

$$= \frac{ab(a+b)\,sin^2\alpha\,sin^2\beta\,sin^2\gamma}{a\,sin^2\alpha\,sin(\beta+\gamma)\,sin(\beta-\gamma) + b\,sin^2\gamma\,sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{\dfrac{a(a+b)\,sin^2\alpha\,sin^2\beta}{sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)}}{1 + \dfrac{a\,sin^2\alpha\,sin(\beta+\gamma)\,sin(\beta-\gamma)}{b\,sin^2\gamma\,sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)}}.$$

Stellende nu

$$\frac{a\,sin^2\alpha\,sin(\beta+\gamma)\,sin(\beta-\gamma)}{b\,sin^2\gamma\,sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)} = tang^2\varphi,$$

of $$tang\,\varphi = \frac{sin\,\alpha}{sin\,\gamma}\sqrt{\frac{a\,sin(\beta+\gamma)\,sin(\beta-\gamma)}{b\,sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)}},$$

dan wordt

$$x^2 = a(a+b)\frac{sin^2\alpha\,sin^2\beta\,cos^2\varphi}{sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)},$$

derhalve

$$x = sin\,\alpha\,sin\,\beta\,cos\,\varphi\sqrt{\frac{a(a+b)}{sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)}},$$

waardoor ons doel is bereikt.

Stelt men de bakens C en E ter wederzijde op gelijken afstand van de loodlijn BF, dan wordt $\alpha = \gamma$ en hierdoor gaat (4) over in de veel eenvoudiger uitdrukking

$$x = \sqrt{\frac{ab}{cot^2\alpha - cot^2\beta}} = sin\,\alpha\,sin\,\beta\sqrt{\frac{ab}{sin(\beta+\alpha)\,sin(\beta-\alpha)}}.$$

### *B.* Het bepalen van afstanden.

63. Om afstanden, die niet rechtstreeks kunnen gemeten worden, te bepalen, moet men meestal gebruik maken van hoeken, waaronder twee plaatsen uit een zeker oogpunt worden gezien, dat zijn de hoeken, gevormd door de lijnen uit het oogpunt naar die plaatsen getrokken. Bij de berekening worden die hoeken ondersteld te zijn gelegen in het horizontale vlak, zoodat zij tot dit vlak moeten herleid worden, wanneer de meting daarin niet heeft plaats gehad. Deze *herleiding van een hoek tot den horizon*,

welke in de geodesie herhaaldelijk moet toegepast worden, kan op de volgende wijze volbracht worden.

Zij ACB (fig. 17) de hoek, die uit het oogpunt C in de ruimte is gemeten en herleid moet worden, A'C de projectie van AC en B'C de projectie van BC op het horizontale vlak, dan moet $\llcorner$ A'CB' worden bepaald. Daartoe meet men de hoeken ACC' en BCC', die de lijnen AC en BC met de verticaal van C maken, waarvoor ook de hoeken tusschen deze lijnen en hare projectiën kunnen gemeten worden, zijnde de complementen van de eerstgenoemden.

Stellende nu

$$\llcorner ACB = \alpha, \ \llcorner ACC' = \beta, \ \llcorner BCC' = \beta' \text{ en } \llcorner A'CB' = \varphi,$$

dan neme men op de lijnen AC, CB twee stukken $Cc$, $Cb$, elk gelijk aan de eenheid van lengtemaat en trekke de loodlijn $aa'$, $bb'$ op het horizontale vlak, zoo is

$$aa' = \cos\beta, \qquad Ca' = \sin\beta,$$
$$bb' = \cos\beta', \qquad Cb' = \sin\beta';$$

en in $\triangle\, a'Cb'$

$$a'b'^2 = \sin^2\beta + \sin^2\beta' - 2\sin\beta\sin\beta'\cos\varphi.$$

Trekkende verder $ad$ evenwijdig aan $a'b'$, dan is

$$bd^2 = (\cos\beta - \cos\beta')^2 = \cos^2\beta + \cos^2\beta' - 2\cos\beta\cos\beta',$$

derhalve

$$ab^2 = a'b'^2 + bd^2 = 2 - 2\cos\beta\cos\beta' - 2\sin\beta\sin\beta'\cos\varphi.$$

Maar in den driehoek $Cab$ is tevens $ab^2 = 2 - 2\cos\alpha$, waaruit door gelijkstelling dezer beide waarden voor $ab^2$ onmiddellijk volgt

$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\beta'\cos\varphi + \cos\beta\cos\beta',$$

en alzoo

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\beta'}{\sin\beta\sin\beta'} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

door welke formule de hoek $\varphi$, dat is de horizontale projectie van den hoek $\alpha$, kan berekend worden. Wij zullen echter in het volgende hoofdstuk eene andere oplossing van dit vraagstuk geven, afgeleid uit de bolvormige driehoeksmeting, en daarbij tevens eene voor de logarithmische berekening meer geschikte formule ter bepaling van den hoek $\varphi$ mededeelen.

64. Om van eene plaats B (fig. 18), waar men zich bevindt, den afstand tot eene zichtbare maar ontoegankelijke plaats C te bepalen, is de volgende handelwijze de eenvoudigste. Men stelt een baken op een punt A, dat van B genaakbaar en waaruit ook

C zichtbaar is, meet den afstand AB, benevens de hoeken waaronder men uit elk der punten B, A de plaats C en het andere punt ziet. Stellende

$$AB = a, \quad \angle CAB = \alpha, \quad \angle CBA = \beta,$$

dan is in $\triangle$ ABC:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)},$$

gevende:

$$BC = a\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad AC = a\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad . \; . \; (6)$$

waardoor de afstanden van A en B tot C kunnen bereken worden.

Is men echter niet voorzien van instrumenten voor het meten van hoeken, dan handelt men als volgt. In de richting van C naar B plaatst men een baken B′ en evenzoo in de richting van C naar A een baken A′ en meet behalve AB $= a$ nog de afstanden

$$BB' = b, \quad AA' = b', \quad BA' = c, \quad AB' = c',$$

dan zijn van de driehoeken ABB′ en ABA′ de drie zijden bekend, zoodat de hoeken kunnen berekend worden. Hieruit vindt men $\alpha$ en $\beta$ als supplementen van $\angle$ BAA′ en $\angle$ ABB′, en deze gesubstitueerd in verg. (6) geven de gevraagde afstanden.

*Voorbeeld.* Zij $a = 38^m$, $b = 86^m$, $b' = 60^m$, $c = 81^m$, $d' = 97^m$. Men zal vinden BC $= 91^m,547$.

65. Wil men den afstand bepalen van twee plaatsen A en B (fig, 19), die beiden ongenaakbaar zijn, dan stelle men bakens in twee punten C en D, die onderling toegankelijk en van waar de plaatsen A en B zichtbaar zijn, meet den afstand CD en uit elk der punten de hoeken, waaronder de beide plaatsen en de andere baken gezien worden. Zij

$$AB = x, \; CD = a, \; \angle ACD = p, \; \angle BCD = q, \; \angle ADC = r, \; \angle ADC = s.$$

Nu zijn in elk der driehoeken ACD, CDB bekend eene zijde CD, met twee aanliggende hoeken; hierdoor verkrijgt men de lengte der vier afstanden CA, CB, DA, DB, zoodat in elk der driehoeken ACB, ADB, ter berekening van den begeerden afstand AB, bekend worden twee zijden met den ingesloten hoek.

Noemende de vier voormelde afstanden respectivelijk $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, dan heeft men blijkbaar voor hunne waarden,

$$\delta = a\,\frac{\sin r}{\sin(p+q+r)}, \qquad \delta_1 = a\,\frac{\sin(r+s)}{\sin(q+r+s)},$$

$$\delta_2 = a\,\frac{\sin(p+q)}{\sin(p+q+r)}, \qquad \delta_3 = a\,\frac{\sin q}{\sin(q+r+s)}.$$

b) Dit is het probleem van Hansen

Hansen (P.A.), groot sterrenkundige werd geboren te Tondern in Sleeswijk Holstein in 1795 en stierf in 1874 als directeur der Sterrenwacht te Gotha. Bekend door zijn maantafels en vele geschriften.

Wil men nu de onbekende zijde AB door middel van $\delta$, $\delta_1$ en den ingesloten hoek $p$ berekenen, zoo kan men, ingevolge de aanmerking op het III[de] geval der scheefhoekige driehoeken (n° 49), $\frac{\delta_1}{\delta} = tg\ \varphi$ stellen, en de hoeken A en B bepalen door eene der formulen

$$tg\ \tfrac{1}{2}(B - A) = tg\ (45^\circ - \varphi)\ cot\ \tfrac{1}{2}p,$$

of $$tg\ (A + \tfrac{1}{2}p) = tg\ (45^\circ + \varphi)\ tg\ \tfrac{1}{2}p,$$

waarin alzoo $$tg\ \varphi = \frac{sin\ (r + s)\ sin\ (p + q + r)}{sin\ r\ sin\ (b + r + s)}.$$

Eindelijk geeft de driehoek ACB

$$x = \frac{\delta\ sin\ p}{sin\ B} = \frac{\delta_1\ sin\ p}{sin\ A}.$$

Gelijksoortige formulen vindt men ter berekening van $x$ uit den driehoek ADB.

*Voorbeeld.* Zij $a = 76^{e},9$. $p = 14^\circ\ 59'\ 5$. $q = 25^\circ 16'\ 25''$. $r = 90^\circ\ 25'\ 40''$. $s = 36^\circ\ 54'\ 50''$. Men zal vinden $x = 36^{e},8823$.

*Aanmerking.* De basis CD kan verschillende standen hebben ten aanzien van de lijn AB, zoo als afzonderlijk in de figuren 20, 21 en 22 wordt aangewezen. Na de hiervoor gegevene oplossing zal het den leerling gemakkelijk vallen, voor elk dezer bijzondere standen, de formulen te vinden ter berekening van den afstand AB uit de vijf gegevens.

Onderstelt men den afstand AB (fig. 19) bekend, en even als in het vorige vraagstuk de vier hoeken ACB, BCC, ADC, ADB gemeten, zoo kan hieruit den afstand CD door de volgende beschouwing bepaald worden.

Het is duidelijk dat, indien men op eene willekeurige lijn CD, met behulp der vier gegevene hoeken, den vierhoek ABCD construeert, deze figuur alsdan gelijkvormig zijn zal aan den vierhoek, waarin de onbekende lijn CD met die willekeurige lijn eene gelijkstandige zijde is. Men kan alzoo, door middel der oplossing van het vorige vraagstuk, den afstand AB berekenen, overeenstemmende met eene basis CD gelijk aan de eenheid van lengtemaat. Vindt men dus dezen afstand $= d$ ellen, en is AB $= a$ ellen, dan zal de begeerde afstand CD $= x$ gevonden worden door de evenredigheid

$$d : 1 = a : x,$$

waaruit $$x = \frac{a}{d} \text{ ellen.}$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 50_m,75$. $p = 12^\circ\, 4'\, 18''$. $q = 27^\circ\, 13'\, 20''$. $r = 20^\circ\, 16'\, 24''$. en $s = 32^\circ\, 4'\, 6''$. Men zal vinden $x = 120_m,6927$.

66. *Van de vier ontoegankelijke plaatsen* A, B. C, D, (fig. 23) *op eene rechte lijn gelegen, zijn de afstanden* AB *en* CD *tusschen de beide eersten en de beide laatsten bekend. Indien men nu uit eenige standplaats* P *de drie gezichtshoeken* APB, BPC, CPD *heeft kunnen waarnemen, zal men hieruit den afstand* BC, *tusschen het tweede en derde voorwerp, zoo mede de afstanden van het punt* P *tot elk der vier plaatsen op de volgende wijze kunnen berekenen.*

Men stelle de drie gemeten hoeken $= p, q, r$; verder de bekende afstanden AB, CD $= a, b$, en den begeerden afstand BC $= x$. De in de figuur aanwezige driehoeken leveren de navolgende evenredigheden op:

$$\begin{aligned} a : BP &= \sin p : \sin A, \\ PB : x &= \sin C : \sin q, \\ b : PD &= \sin r : \sin C, \\ PD : AD &= \sin A : \sin (p + q + r). \end{aligned}$$

Al deze evenredigheden met elkander vermenigvuldigende, komt er, na weglating der gemeenschappelijke factoren, en stellende kortheidshalve $p + q + r = P$,

$$ab : x(a + b + x) = \sin p \sin r : \sin q \sin P,$$

dus
$$x^2 + (a + b)x = ab \times \frac{\sin q \sin P}{\sin p \sin r}.$$

Zij $x = \frac{1}{2}(a + b)y$, dan verandert de laatste vergelijking in

$$y^2 + 2y = \frac{4\,ab}{(a + b)^2} \times \frac{\sin q \sin P}{\sin p \sin r}.$$

Men stelle nu

$$tg\, \alpha = \frac{2}{a + b} \sqrt{\frac{ab \sin q \sin P}{\sin p \sin r}},$$

dan komt er
$$y + 1 = \pm \sec \alpha$$
en
$$y = -1 \pm \sec \alpha = tg\, \alpha\, tg\, \tfrac{1}{2}\alpha,$$

indien men zich namelijk, ter vermijding eener negatieve waarde van $y$, bij het bovenste teeken bepaalt. Derhalve

$$x = \tfrac{1}{2}(a + b)\, tg\, \alpha \,.\, tg\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

Ter berekening der vier afstanden PA, PB, PC, PD, stelle men in den driehoek APC, waarin de som der hoeken A en C $= 180^\circ - (p + q) = 2\beta$,

$$A = \beta + \varphi \quad \text{en} \quad C = \beta - \varphi,$$

(1) Snellius (1614)
Pothenot (1692)

dan volgt uit de driehoeken ABP, BCP,

$$BP = \frac{a \sin(\beta + \varphi)}{\sin p} = \frac{x \sin(\beta - \varphi)}{\sin q},$$

$$\text{of} \quad \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{a \sin q}{x \sin p} = tg\, \mu.$$

De afstand $x$ door de hiervoor gevonden formule reeds bekend zijnde, zoo zal hierdoor de hulphoek $\mu$ insgelijks bepaald zijn.

Men heeft alzoo de evenredigheid

$$\sin(\beta - \varphi) : \sin(\beta + \varphi) = tg\, \mu : 1,$$

of $\quad \sin\beta \cos\varphi : \cos\beta \sin\varphi = 1 + tg\,\mu : 1 - tg\,\mu,$

dus $\quad tg\,\varphi = tg\,(45^\circ - \mu)\, tg\,\beta,$

zoodat al de hoeken in de figuur thans bekend zijn. Derhalve

$$PA = \frac{a \sin(p + A)}{\sin p}. \qquad PB = \frac{a \sin A}{\sin p}.$$

$$PC = \frac{(a + x) \sin A}{\sin(p+q)} = \frac{x \sin(p + A)}{\sin q}.$$

$$PD = \frac{(a + b + x) \sin A}{\sin(p + q + r)} = \frac{(b + x) \sin(p + A)}{\sin(q + r)} = \frac{b \sin C}{\sin r}.$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 589^m,8$. $b = 475^m,7$. $p = 36^\circ$. $q = 27^\circ$. $r = 18^\circ$, dan zal men vinden $x = 455^m,4$.

### C. Problema van Snellius.

67. Tot de merkwaardigste toepassingen van de driehoeksmeting op de geodesie behoort het vraagstuk, dat hier te lande algemeen onder den naam van *problema van* Snellius, in het buitenland ook onder dien van vraagstuk van Pothenot, bekend staat. Snellius toch maakte gebruik van dit vraagstuk bij zijne bekende graadmeting, ter bepaling van de grootte des aardbols, en bij alle latere geodetische opmetingen is het van uitgestrekte toepassing gebleven.

Het vraagstuk komt neêr op de bepaling van de ligging van een vierde punt ten opzichte van drie reeds in kaart gebrachte punten door middel van twee hoekmetingen.

*Zijn b. v. de onderlinge afstanden van drie plaatsen* A, B, C (fig. 24) *bekend, dan is het de vraag de afstanden van elk dezer plaatsen tot een vierde in hetzelfde vlak gelegen punt* D *te bepalen, wanneer men de hoeken* ADB *en* BDC *waargenomen heeft, waaronder deze plaatsen twee aan twee uit het gemelde punt gezien worden.*

Onderscheidene wiskundigen hebben hiervan in lateren tijd verschillende oplossingen gegeven, waaronder echter de volgende, die van DELAMBRE afkomstig is, ongetwijfeld de voorkeur verdient, daar zij voor de berekening met logarithmen het meest geschikt is.

Wat de meetkundige constructie van dit vraagstuk betreft, zoo kan men daarbij op twee verschillende wijzen te werk gaan. Eerstens is het gemakkelijk in te zien, dat indien men op de zijden AB en BC van den gegeven driehoek ABC, cirkelsegmenten beschrijft, die respectivelijk de hoeken ADB, BDC bevatten, alsdan het snijpunt dezer beide segmenten, het begeerde punt D zal opleveren *) In de tweede plaats kan men aldus te werk gaan. Men onderstelle om den driehoek ADC een cirkel beschreven, snijdende de lijn BD in E, en trekke vervolgens de koorden AE, CE, dan is, volgens de eigenschappen des cirkels,

$$\angle ACE = \angle ADB \quad \text{en} \quad \angle CAE = \angle BDC,$$

waaruit alzoo de navolgende constructie voortvloeit. Trek uit A en C lijnen, makende met AC hoeken gelijk aan de gemeten hoeken BDC, ADB, en elkander in E snijdende. Verleng BE onbepaald, en maak $\angle$ ACD $=$ $\angle$ AED, dan zal het begeerde punt D bepaald worden door de snijding der lijnen BE en CD. Men zoude te dien einde insgelijks uit A de lijn AD kunnen trekken, zoodanig dat $\angle$ CAD $=$ $\angle$ DEC zij. Deze constructie, waarbij, gelijk men ziet, geene cirkelsegmenten behoeven beschreven te worden, levert de gemakkelijkste graphische oplossing van het problema op. Wij gaan thans tot de trigonometrische over.

Daar de ligging der drie punten A, B, C gegeven is, kan men hierbij als bekend aannemen: AB $= a$, BC $= b$ en $\angle$ ABC $= \alpha$; wijders $\angle$ ADB $= p$, $\angle$ BDC $= q$, $\angle$ BAD $= x$, $\angle$ BCD $= y$, en de onbekends afstanden DA, DB, DC $= \delta$, $\delta_1$, $\delta_2$.

De driehoeken BAD, BDC geven de evenredigheden

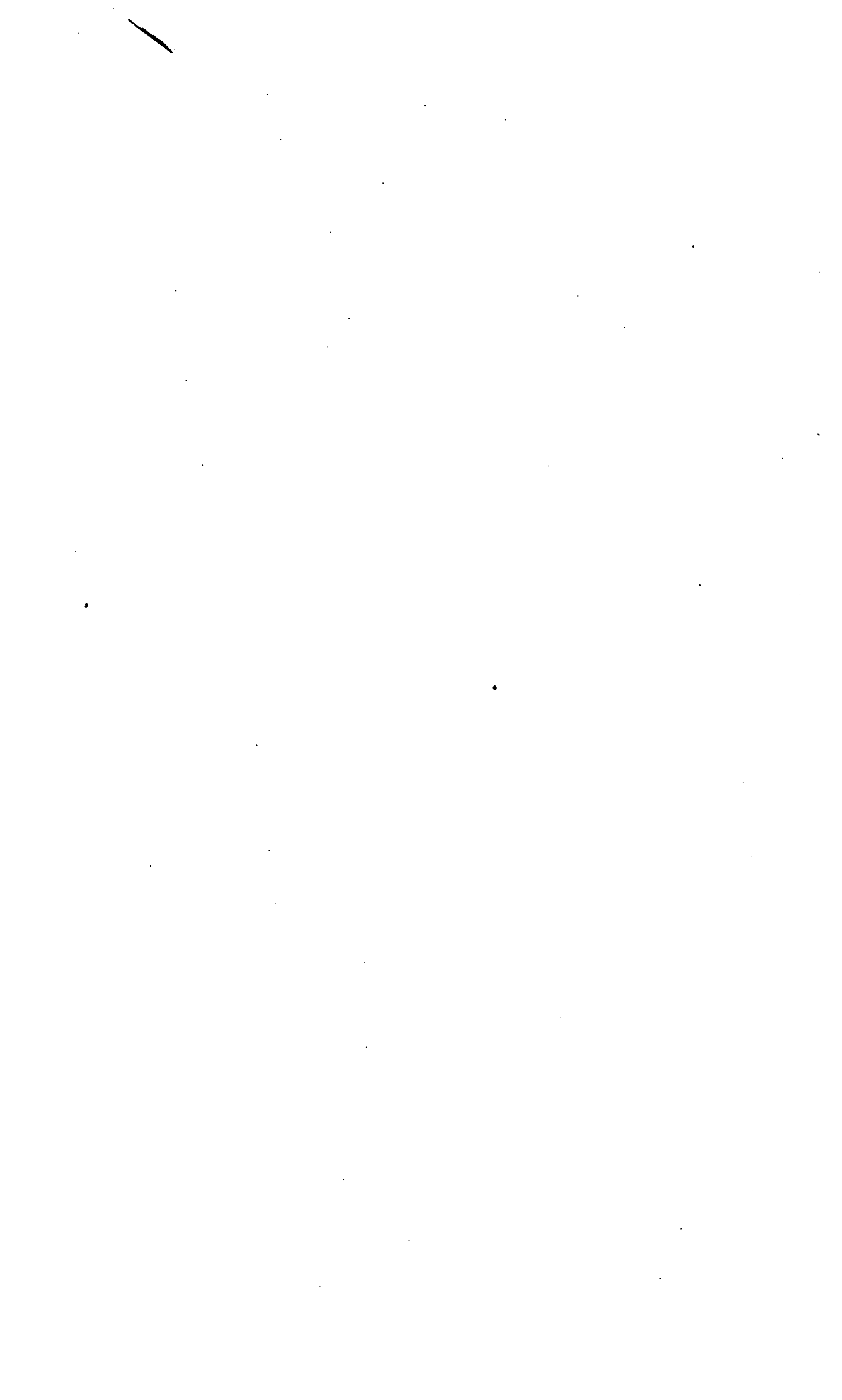
$$a : \delta_1 = \sin p : \sin x,$$
$$b : \delta_1 = \sin q : \sin y,$$

$$\text{dus} \quad \delta_1 = \frac{a \sin x}{\sin p} = \frac{b \sin y}{\sin q},$$

waaruit volgt: $\sin x : \sin y = b \sin p : a \sin q$.

---

*) In onze figuur is deze constructie wegens hare eenvoudigheid niet uitgevoerd.



Stel $\frac{a \sin q}{b \sin p} = tg\ \varphi$, dan verandert de voorgaande evenredigheid in

$$\sin x : \sin y = 1 : tg\ \varphi,$$

dus $\quad \sin x + \sin y : \sin x - \sin y = 1 + tg\ \varphi : 1 - tg\ \varphi,$

of $\quad tg\ \frac{1}{2}(x+y) : tg\ \frac{1}{2}(x-y) = 1 : tg\ (45^\circ - \varphi),$

en $\quad tg\ \frac{1}{2}(x-y) = tg\ (45^\circ - \varphi)\ tg\ \frac{1}{2}(x+y).$

Nu is in deze vergelijking $\frac{1}{2}(x+y)$ bekend; immers, in den vierhoek ABCD heeft men

$$\alpha + p + q + x + y = 360^\circ,$$

derhalve $\quad \frac{1}{2}(x+y) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + p + q).$

Zij nu kortheidshalve $180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + p + q) = \beta$,

dan is $\quad \frac{1}{2}(x+y) = \beta.$

De oplossing van ons vraagstuk is derhalve begrepen in het navolgend stelsel formulen:

$$tg\ \varphi = \frac{a \sin q}{b \sin p} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

$$\beta = \tfrac{1}{2}(x+y) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha + p + q) \quad \dots \quad (2)$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}(x-y) = tg\ \beta\ tg\ (45^\circ - \varphi) \quad \dots\dots \quad (3)$$

$$x = \beta + \tfrac{1}{2}(x-y), \quad y = \beta - \tfrac{1}{2}(x-y) \quad \dots \quad (4)$$

$$\delta = \frac{a \sin (p+x)}{\sin p} \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

$$\delta_1 = \frac{a \sin x}{\sin p} = \frac{b \sin y}{\sin q} \quad \dots\dots \quad (6)$$

$$\delta_2 = \frac{b \sin (q+y)}{\sin q} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

waardoor de onbekenden met behulp der logarithmen gomakkelijk kunnen berekend worden.

Is de driehoek ABC door zijne drie zijden gegeven, dan zal men daarenboven de hoeken A en C kunnen berekenen. De hoeken $x$ en $y$ volgens de voorgaande formulen bepaald zijnde, zoo heeft men hierdoor in den driehoek ADC bekend de zijde AC $= c$, en de beide aanliggende hoeken $x - A$, $y - C$, waaruit dus de afstanden $\delta$, $\delta_2$ nog kunnen bepaald worden door de formulen

$$\delta = \frac{c \sin (y - C)}{\sin (p+q)}, \qquad \delta_2 = \frac{c \sin (x - A)}{\sin (p+q)},$$

strekkende gelijktijdig tot proef op de juistheid der volgens form. (5) en (7) berekende waarden dezer afstanden.

*Voorbeeld.* Zij $a = 2817^m,1$. $b = 3033^m,8$. $c = 3250^m,4$.

$p = 100^\circ\ 9'\ 20''$. $q = 117^\circ\ 14'\ 25''$. Men zal vinden $\delta = 1776^m,33$. $\delta_1 = 1895^m,54$ en $\delta_2 = 1654^m,99$.

68. *Aanmerking.* In de voorgaande oplossing is het standpunt D buiten den driehoek ABC, en wel binnen den hoek B aangenomen. Dat punt kan intusschen ten aanzien der drie bekende punten A, B, C op verschillende wijzen gelegen zijn, die tot zoo vele verschillende gevallen van oplossing aanleiding geven. Zij zijn echter allen, met inachtneming der teekens van de goniometrische vormen, in de hiervoor gevonden formulen begrepen, zoodat wij het niet ondienstig geoordeeld hebben, hier in eenige bijzonderheden te treden.

I^ste^ *Geval.* Onderstellen wij in de eerste plaats, dat het punt D zich juist in de richting der lijn AC bevinde. In dat bijzonder geval zal men hebben:

$$p + q = 180^\circ,$$

$$\text{dus} \quad \tfrac{1}{2}(x + y) = \beta = 90 - \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$tg\,\varphi = \frac{a}{b}. \quad tg\,\tfrac{1}{2}(x - y) = tg\,(45^\circ - \varphi)\cot\tfrac{1}{2}\alpha.$$

De hoeken $x$ en $y$ zijn hier niets anders dan de hoeken A en C des driehoeks ABC. De formulen ter berekening der drie afstanden $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ blijven dezelfde als te voren.

II^de^ *Geval.* Indien het punt D valt in het verlengde van BA (fig. 25), moet in het stelsel formulen $p = 0$ gesteld worden.

Hierdoor wordt $\varphi = 90^\circ$, $x = 180^\circ$,

$$\delta_1 = DB = b\frac{\sin(\alpha + q)}{\sin q},$$

$$\delta_2 = DC = b\frac{\sin\alpha}{\sin q},$$

welke uitkomsten uit de figuur onmiddellijk kunnen ontleend worden. Het punt A vervalt hierbij geheel, zooals ook uit den aard der zaak blijkt, tenzij de afstanden BA en CA moeten dienen om $\alpha$ te berekenen.

III^de^ *Geval.* Zij het punt D binnen den driehoek ABC (fig. 26) gelegen. De hoeken ABD, BDC worden alsdan stomp. Vervangt men deze door hunne supplementen, zoo heeft men

$$\beta = \tfrac{1}{2}(x + y) = \tfrac{1}{2}(p + q - \alpha).$$

De waarden van $\delta$ en $\delta_2$ worden thans

$$\delta = \frac{a\sin(p - x)}{\sin p}, \qquad \delta_2 = \frac{b\sin(q - y)}{\sin q},$$

terwijl de overige formulen geene verandering ondergaan.

IV[de] *Geval.* Het punt D ligge binnen den hoek A''CB'' (fig. 27). De hoeken DBC en BDC worden bij dien stand der lijn BD blijkbaar negatief, terwijl de hoek $y$ zal moeten vervangen worden door $360^0 - y$, zoodat men heeft, in plaats der form. (2):

$$\tfrac{1}{2}(x + 360^0 - y) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\alpha + p - q),$$

of
$$\tfrac{1}{2}(y - x) = \tfrac{1}{2}(\alpha + p - q).$$

De hoek $\varphi$ tegelijk met $q$ negatief wordende, zoo verandert de form. (3) in

$$tg\, \tfrac{1}{2}(x + y - 360^0) = tg\, \tfrac{1}{2}(x - y + 360^0)\, tg\, (45^0 + \varphi),$$

of
$$tg\, \tfrac{1}{2}(y + x) = tg\, \tfrac{1}{2}(x - y)\, tg\, (45^0 + \varphi).$$

De formulen ter bepaling van $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ blijven dezelfde. Immers, daar $sin\,(q + y)$ overgaat in $sin\,(360^0 - y - q) = - sin\,(q + y)$, zal de breuk $\frac{sin\,(q + y)}{sin\, q}$ hierdoor geene verandering ondergaan.

V[de] *Geval.* Bevindt zich het punt D binnen den hoek BAC, dan zal de hoek $y$ wederom te vervangen zijn door $360^0 - y$, en daarbij de hoek $q$ als negatief moeten in rekening gebracht worden, waaruit dus dezelfde formulen als voor het IV[de] geval ontstaan.

Men zou echter even goed den hoek $y$ als negatief kunnen beschouwen, en daarbij $q$ vervangen door $360^0 - q$. Hierdoor verkrijgt men

$$\tfrac{1}{2}(x - y) = \tfrac{1}{2}(q - p - \alpha),$$

en
$$tg\, \tfrac{1}{2}(x + y) = tg\, \tfrac{1}{2}(x - y)\, tg\, (45^0 + \varphi),$$

als zijnde $\varphi$ thans insgelijks negatief geworden, terwijl de overige formulen geene verandering ondergaan, hetgeen met de uitkomsten voor het IV[de] geval verkregen, geheel overeenstemt.

VI[de] *Geval.* Bij de ligging van het punt D binnen den hoek A'BC'', veranderen de hoeken $p$ en $q$ in hunne supplementen, terwijl $x$ en $y$ beide negatief worden. Hierdoor heeft men

$$\beta = - \tfrac{1}{2}(x + y) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\alpha + 360^0 - p - q),$$

of
$$\tfrac{1}{2}(x + y) = \tfrac{1}{2}(\alpha - p - q),$$

en
$$tg\, \tfrac{1}{2}(x - y) = tg\, \tfrac{1}{2}(x + y)\, tg\, (45^0 - \varphi),$$

zonder dat de overige formulen hierdoor eenige wijziging ondergaan.

Men kan dit geval ook onmiddellijk tot dat van fig. 24, waarop onze formulen gegrond zijn, terug brengen, door te onderstellen, dat het hoekpunt B des driehoeks ABC beneden de lijn AC valt, waardoor $\alpha$ in $360^0 - \alpha$ overgaat, en dus $\tfrac{1}{2}(x + y)$ in $\tfrac{1}{2}(\alpha - p - q)$, even als hierboven.

VII[de] *Geval.* Het punt D zij binnen den hoek ACB gelegen. De hoek $x$ wordt alsdan negatief, terwijl $p$ verandert in $360^\circ - p$, waardoor

$$\tfrac{1}{2}(y - x) = \tfrac{1}{2}(p - q - \alpha),$$
$$\text{en} \quad tg\,\tfrac{1}{2}(x + y) = tg\,\tfrac{1}{2}(x - y)\, tg\,(45^\circ + \varphi).$$

Dit geval is blijkbaar gelijkvormig aan het V[de], en kan daaruit afgeleid worden door verwisseling van $x$ in $y$, van $p$ in $q$ en van $a$ in $b$.

VIII[ste] *Geval.* Ligt eindelijk het punt D binnen den hoek B'AC'', dan wordt $p$ negatief, en $x$ verandert in $360^\circ - x$. Men heeft alzoo

$$\tfrac{1}{2}(360^\circ - x + y) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha - p + q),$$
$$\text{of} \quad \tfrac{1}{2}(x - y) = \tfrac{1}{2}(\alpha - p + q)$$
$$\text{en} \quad tg\,\tfrac{1}{2}(x + y) = tg\,\tfrac{1}{2}(y - x)\, tg\,(45^\circ + \varphi),$$

even als zulks onmiddellijk uit het VI[de] geval had kunnen afgeleid worden, door eene gelijksoortige onderlinge verwisseling als hiervoor in het VII[de] geval.

In elk dezer gevallen blijven de formulen ter bepaling van $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ insgelijks van toepassing.

IX[de] *Geval.* Onderstellen wij nog, dat de drie punten A, B, C op eene rechte lijn gelegen zijn, waardoor $\alpha = 180^\circ$. Men heeft alsdan ter bepaling der hoeken $x$ en $y$,

$$\beta = \tfrac{1}{2}(x + y) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(p + q),$$
$$tg\,\varphi = \frac{a \sin q}{b \sin p}, \quad tg\,\tfrac{1}{2}(x - y) = \frac{tg\,(45^\circ - \varphi)}{tg\,\tfrac{1}{2}(p + q)},$$

terwijl de formulen voor $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ ook hier zonder eenige verandering kunnen gebruikt worden.

69. Het problema van Snellius is voor de volgende uitbreiding vatbaar.

*Drie punten* A, B, C, (fig. 28) *in ligging gegeven zijnde, heeft men uit twee andere in hetzelfde vlak gelegen punten* D, E, *de hoeken* ADB, BDE, DEB, CEB *waargenomen; men vraagt hoedanig de plaats dezer beide laatste punten ten aanzien der drie gegevene punten door berekening kan worden bepaald.*

Men stelle AB $= a$, BC $= b$, $\angle$ ABC $=$ B, en neme deze grootheden als bekend aan; zij voorts $\angle$ ADB $= \alpha$, $\angle$ BDE $= \beta$, $\angle$ BED $= \gamma$, $\angle$ BEC $= \delta$, en de onbekende hoeken BAD, BCE $= x$ en $y$.

De driehoeken ADB, BDE, BEC geven de evenredigheden:

$$a : DB = \sin\alpha : \sin x,$$
$$DB : BE = \sin\gamma : \sin\beta,$$
$$BE : b = \sin y : \sin\delta,$$

waaruit door vermenigvuldiging ontstaat

$$a : b = \sin\alpha \sin\gamma \sin y : \sin x \sin\beta \sin\delta,$$

of $\sin x : \sin y = b \sin\alpha \sin\gamma : a \sin\beta \sin\delta.$

Men stelle $$tg\,\varphi = \frac{a \sin\beta \sin\delta}{b \sin\alpha \sin\gamma},$$

dus $\sin x + \sin y : \sin x - \sin y = 1 + tg\,\varphi : 1 - tg\,\varphi,$

of $tg\,\frac{1}{2}(x+y) : tg\,\frac{1}{2}(x-y) = 1 : tg\,(45^\circ - \varphi),$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(x-y) = tg\,(45^\circ - \varphi)\, tg\,\tfrac{1}{2}(x+y).$$

Nu is $\frac{1}{2}(x+y)$ bekend, vermits in den vijfhoek ABCED,

$$x + y + \alpha + \beta + \gamma + \delta + B = 540^\circ,$$

dus $\frac{1}{2}(x+y) = 270^\circ - \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+B) = \mu.$

De oplossing van dit algemeene vraagstuk is alzoo begrepen in het volgend stelsel formulen:

$$tg\,\varphi = \frac{a \sin\beta \sin\delta}{b \sin\alpha \sin\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(x-y) = tg\,(45^\circ - \varphi)\, tg\,\mu \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$x = \mu + \tfrac{1}{2}(x-y),\ y = \mu - \tfrac{1}{2}(x-y) \quad \ldots \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{ll} DA = \dfrac{a \sin(x+\alpha)}{\sin\alpha}, & DB = \dfrac{a \sin x}{\sin\alpha} \\ BE = \dfrac{b \sin y}{\sin\delta}, & EC = \dfrac{b \sin(y+\delta)}{\sin\delta} \\ DE = BD\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma} = BE\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}; & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

welke formulen in die van het voorgaande vraagstuk overgaan, zoodra men de punten D, E in elkander doet vallen, en dus $\beta + \gamma = 180^\circ$ of $\sin\beta = \sin\gamma$ stelt. Zulks zal eveneens plaats hebben, indien het punt D op de lijn AE gelegen, en dus $\alpha + \beta = 180^\circ$ is, of ook indien het punt E op de lijn DC gelegen, en dus $\gamma + \delta = 180^\circ$ is.

*Voorbeeld.* Zij $a = 4567^m$. $b = 3998^m,5$. $B = 113^\circ\,27'\,30''$. $\alpha = 39^\circ\,27'\,20''$. $\beta = 65^\circ\,8'\,39''$. $\gamma = 74^\circ\,49'\,50''$. $\delta = 33^\circ\,55'\,10''$. Men zal vinden

$AD = 4579^m,912$, $BD = 7054^m,478$, $EC = 3991^m,486$,
$BE = 6632\,,903$, $DE = 4701^m,615$.

70. De meetkundige constructie van dit vraagstuk laat zich gemakkelijk tot die van het voorgaande terug brengen.

Men trekke namelijk door de uiteinden D en E eener willekeurige lijn DE (fig. 29), twee lijnen onder de hoeken $\beta$ en $\gamma$, elkander in B snijdende, verder nog twee andere lijnen EC, DA, makende met BE en BD de hoeken $\delta$ en $\alpha$. Verlengt men nu die lijnen tot aan hare ontmoeting in B, dan is de vierhoek DBEP gelijkvormig aan den overeenkomstigen vierhoek van fig. 28, en dus zijn hierdoor bekend de hoeken $p$ en $q$, waaronder A, B, C uit het punt P worden waargenomen. Dit laatste punt nu bepaald zijnde volgens de constructie van het problema van Snellius, zoo vindt men verder de punten D en E, door uit B lijnen te trekken, makende met BP, de hoeken PBD en PBE van fig. 28.

*Aanmerking.* Dit vraagstuk kan insgelijks, ten aanzien van de onderlinge ligging der hoekpunten van den vijfhoek, tot vele bijzondere gevallen aanleiding geven, waarvoor echter steeds dezelfde formulen gelden, met inachtneming slechts der veranderingen, welke de teekens der goniometrische vormen zullen ondergaan, indien eenige der hoeken van de figuur negatief of grooter dan 180° worden. Na de uitvoerige behandeling van het problema van Snellius mogen wij het onderzoek der hierbedoelde gevallen den lezer ter eigen oefening overlaten.

71. Eindelijk kan het problema van Snellius nog de volgende wijziging of uitbreiding ondergaan.

*Drie punten* A, B, C (fig. 30) *in ligging bekend zijnde, zoo heeft men de beide eerste uit een vierde punt* D, *onder den gezichtshoek* ADB *waargenomen. Om het derde punt* C *te kunnen zien, is men verplicht geweest in de richting* BD *tot in* E *terug te gaan, en heeft men aldaar den hoek* BEC *waargenomen. Zoo nu tevens de afstand* DE *bekend is, vraagt men hieruit de ligging der punten* D, E *ten aanzien van den driehoek* ABC *te bepalen.*

*Oplossing.* Men stelle AB $= a$, BC $= b$, DE $= \delta$, de bekende hoeken ABC, ADB, BEC $= \alpha, p, q$. Nu is blijkbaar de som der hoeken BAD, BCE $= 360° - (\alpha + p + q)$.

Zij nu $\beta = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + p + q)$, dan kan men $\angle$ BAD $= \beta + x$ en $\angle$ BCE $= \beta - x$ stellen. Uit de driehoeken ADB, BEC volgt nu

$$BD = \frac{a \sin(\beta + x)}{\sin p} \quad \text{en} \quad BE = \frac{b \sin(\beta - x)}{\sin q}.$$

Men heeft derhalve, ter bepaling van $x$, de vergelijking

$$b\,\frac{\sin(\beta - x)}{\sin q} - a\,\frac{\sin(\beta + x)}{\sin p} = \delta.$$

Zij $tg\,\varphi = \frac{a \sin q}{b \sin p}$, dan verandert de voorgaande vergelijking in

$$(1 - tg\,\varphi) \sin\beta \cos x - (1 + tg\,\varphi) \cos\beta \sin x = \frac{\delta \sin q}{b}.$$

Men stelle verder

$$\frac{(1 - tg\,\varphi) \sin\beta}{(1 + tg\,\varphi) \cos\beta} = tg\,(45^\circ - \varphi)\, tg\,\beta = tg\,\mu\,;$$

dan komt er

$$tg\,\mu \cos x - \sin x = \frac{\delta \sin q}{b \cos\beta\,(1 + tg\,\varphi)}$$

of $$\sin(\mu - x) = \frac{\delta \sin q \cos\mu \cos\varphi}{b \cos\beta \cos(45^\circ - \varphi) \sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

welke formule tot de logarithmische berekening zeer geschikt is, en voor den hoek $\mu - x$ twee verschillende waarden zal opleveren, die elkanders supplementen zijn.

Heeft men dus gevonden $\sin(\mu - x) = k$, dan volgt hieruit

$$x = \mu - Bg \sin k$$

en $$x = \mu + Bg \sin k - 180^\circ,$$

terwijl de vier afstanden DA, DB, EB, EC bepaald worden door de formulen

$$DA = \frac{a \sin(p + \beta + x)}{\sin p}, \quad DB = \frac{a \sin(\beta + x)}{\sin p} \quad . \quad . \quad (13)$$

$$CE = \frac{b \sin(\beta + q - x)}{\sin q}, \quad BE = \frac{b \sin(\beta - x)}{\sin q}.$$

De form. (12) toont aan, dat het vraagstuk slechts voor ééne oplossing vatbaar is, zoodra de gegevens zoodanig zijn, dat de breuk $k$ gelijk aan de eenheid wordt. Bevindt men echter $k > 1$, dan blijkt hieruit, dat de gegevens met het vraagstuk onbestaanbaar zijn. In elk ander geval zullen er twee bijzondere standen der lijn DE met de gegevens overeenstemmen, gelijk zulks door de navolgende meetkundige constructie nader bevestigd wordt.

72. Men beschrijve op AB en BC (fig. 31) twee cirkelsegmenten, die respectievelijk de hoeken $p$ en $q$ kunnen bevatten, dan laat zich gemakkelijk uit de figuur opmaken, dat het vraagstuk hierop nederkomt, om uit het snijpunt B eene koorde BE te trekken, zoodanig dat het stuk DE, tusschen de beide cirkelomtrekken bevat, de gegeven lengte $\delta$ hebbe. Te dien einde trekke men uit C de lijn CF onder den hoek BCF $= p$, en beschrijve verder op de lijn FA een cirkelsegment, kunnende den

hoek $p$ bevatten. Nu make men in dat segment de koorden FG, F$g$, elk gelijk aan de lijn $\delta$; trekke uit A de lijnen AG, A$g$, snijdende het op AB beschreven cirkelsegment in de punten D en $d$, en vereenige B met D en met $d$, dan zullen hierdoor de twee standen der lijn BE bepaald zijn, die aan de gegevens voldoen. Immers, daar $\llcorner$ FEB $=$ $\llcorner$ FCB $= p =$ $\llcorner$ ADB $=$ $\llcorner$ FGD, zoo is de vierhoek FEDG blijkbaar een parallelogram, en dus DE $=$ FG $= \delta$. Hetzelfde bewijs geldt voor de tweede lijn $d$B$e$.

Is de gegevene lijn $\delta$ juist zoo lang als de middellijn des cirkels op AF als koorde beschreven, dan vereenigen zich beide lijnen BE, B$e$, even als de lijnen FG, F$g$, tot eene enkele, in welk geval het vraagstuk slechts ééne oplossing toelaat. Is echter die lijn $\delta$ grooter dan de middellijn van genoemden cirkel, dan strekt zulks ten bewijze dat de gegevens onderling onbestaanbaar zijn.

Ziehier nu ter toepassing een voorbeeld in getallen.

Zij $a = 785^{m}$. $b = 414^{m}$. $\alpha = 117^{0}\,41'\,26''$. $p = 50^{0}\,30'$. $q = 17^{0}\,45'$. $\delta = 306^{m}$. Men zal voor de eene oplossing vinden

BD $= 1003^{m},739$; BE $= 1309^{m},739$, AD $= 510^{m},553$,
CE $= 1356^{m},758$,

en voor de andere oplossing:

BD $= 582^{m},077$, BE $= 888^{m},077$, AD $= 1014^{m}.058$,
CE $= 532^{m},601$.

*Aanmerking.* Dit vraagstuk, hetwelk bij de onderstelling van $\delta = 0$, in dat van Snellius overgaat, is even als het voorgaande voor velerlei belangrijke beschouwingen vatbaar, ten aanzien van de onderlinge ligging der vijf punten. Ons bestek niet toelatende dienaangaande in bijzonderheden te treden, zoo vermeenen wij den weetgierigen lezer te moeten verwijzen naar de *Verzameling van voorstellen*, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*, 1815, II. Deel, bladz. 128 en 205, alwaar de beide laatste vraagstukken op eene meer uitvoerige en leerzame wijze behandeld worden.

# DERDE HOOFDSTUK.

## Bolvormige Driehoeksmeting.



### § 12.

*Algemeene beschouwing der bolvormige driehoeken.* *)

73. Indien men op het oppervlak van een bol drie punten A, B en C naar welgevallen neemt, en deze door bogen van groote cirkels vereenigt, dan ontstaat hieruit een bolvormige driehoek ABC (fig. 32), waarvan de inhoud bepaald wordt door het gedeelte van het oppervlak des bols, dat binnen de drie gemelde bogen besloten is. Zij M het middelpunt van dezen bol, waaruit de stralen MA, MB, MC naar de drie hoekpunten des driehoeks getrokken zijn. De hierdoor gevormde drievlakkige hoek is blijkbaar samengesteld uit drie zijvlakken of vlakke hoeken AMB, AMC, BMC, die de bogen of zijden AB, AC, BC van den driehoek tot maatzullen hebben.

Onder de hoeken eens bolvormigen driehoeks verstaat men de standhoeken tusschen twee der zijvlakken van den drievlakkigen hoek, die in het middelpunt des bols gevormd wordt. Aldus is bijv. de hoek CAB niets anders dan de standhoek der zijvlakken CMA, BMA, wiens grootte bepaald wordt door den hoek, begrepen tusschen de beide raaklijnen, die men in het punt A aan de

*) Men kan hierbij ook raadplegen: VAN GEER. Leerboek der Meetkunde. II. §§ 6, 7 en 17.

bogen AC, AB kan trekken; hetwelk eveneens geldt van elken der twee overige hoeken B en C. Bij deze wijze van beschouwen der op den bol beschreven driehoeken wordt tevens stilzwijgend aangenomen, dat elk der drie bogen minder dan 180° bedraagt.

74. Elke bolvormige driehoek bevat zes onderscheidene samenstellende deelen of elementen, die noodzakelijk zoodanig met elkander verbonden zijn, dat drie derzelve voldoende zijn ter bepaling van elk der drie overigen. De bolvormige driehoeksmeting heeft hoofdzakelijk ten doel de betrekkingen op te sporen, die tusschen de bekende en de onbekende elementen des driehoeks bestaan, ten einde hieruit de regels af te leiden, ter berekening van deze onbekenden in elk der onderscheidene gevallen.

Van belang is het hier te doen opmerken, dat, aangezien deze zes elementen geene andere zijn dan de drie standhoeken der zijvlakken, en de drie hoeken gevormd door de ribben des drievlakkigen hoeks, zij geheel onafhankelijk zijn van den straal des bols. Zij worden steeds door graden uitgedrukt, en bezitten alzoo slechts eene betrekkelijke waarde.

75. In de meetkunde der ruimte wordt betoogd, dat de som der vlakke hoeken van een drievlakkigen hoek minder dan $4R$ of 360° bedraagt, zoo mede dat de som van twee dezer hoeken altijd grooter dan de derde hoek is. Deze beide eigenschappen op den bolvormigen driehoek overgebracht, leeren ons dat

1°. $AB + AC + BC < 4R$, en

2°. $AC + AB > BC$; $AC + BC > AB$; $AB + BC > AC$;

dat is, in woorden uitgedrukt:

1°. *De som der drie zijden eens bolvormigen driehoeks bedraagt altijd minder dan 4R.*

2°. *De som van twee der zijden is altijd grooter dan de derde zijde.*

76. Wanneer men twee zijden AC, AB des driehoeks ABC (fig. 33) tot aan hare ontmoeting in A′ verlengt, dan zullen, zoo als bekend is, de bogen ACA′, ABA′ elk gelijk aan 180° zijn, en $\angle A' = \angle A$. De hierdoor gevormde driehoek A′BC heeft alzoo met den eerstgemelden eene gemeenschappelijke zijde BC en een gelijken overstaanden hoek, terwijl de beide overige zijden en hoeken de supplementen zijn van de overeenkomstige elementen

in den driehoek A′BC. Uit dien hoofde wordt de driehoek A′BC de *supplements*-driehoek van den anderen genaamd, eene benaming die ook wederkeerig geldt. Op elke der drie zijden eens driehoeks laat zich een dusdanige supplements-driehoek beschrijven. Past men nu de eerste der hiervoren vermelde eigenschappen op den supplements-driehoek A′BC toe, dan volgt

$$A'C + A'B + BC < 4R;$$

dat is $$2R - AC + 2R - AB + BC < 4R,$$

of $$AC + AB > BC,$$

waaruit blijkt, op welke wijze de tweede der bedoelde eigenschappen gemakkelijk uit de eerste kan afgeleid worden.

De boog DE uit een der hoekpunten A, A′ als pool met een straal gelijk aan de koorde des kwadrants beschreven, zal de maat van den hoek A zijn, omdat de bogen AD, AE, elk 90° zijnde, de stralen MD, ME loodrecht op de middellijn AA′ des bols staan, en dus ∟ DME den standhoek der vlakken DAM, EAM voorstelt.

77. Behalve den supplements driehoek beschouwt men in de bolvormige driehoeksmeting nog den *pool-* of *aspunts* driehoek. Deze laatste ontstaat door de snijding van drie bogen van groote cirkels A′C′, B′C′, A′B′ (fig. 34), uit de drie hoekpunten A, B, C als polen beschreven. De driehoek A′B′C′ wordt alsdan de pooldriehoek van ABC genaamd, en bezit de belangrijke eigenschap dat *zijne drie zijden en hoeken gelijk zijn aan de supplementen der overstaande hoeken en zijden des gegeven driehoeks.* Zie hier het betoog dezer eigenschap.

Men verlenge de drie zijden AB, BC, AC (die hier ondersteld zijn elk kleiner dan een kwadrant), tot op die des pool-driehoeks, dan zullen de bogen A*c*, A*d*, B*e*, B*f*, C*a*, C*b*, blijkbaar elk 90° zijn, terwijl de hoeken A, B, C tot maat zullen hebben de bogen *cd*, *ef* en *ab*. Verder blijkt uit deze constructie ten duidelijkste, dat de hoeken in *b* en *e* recht, en dus de bogen A′*e*, A′*b* elk gelijk 90° zullen zijn; waaruit volgt, dat het hoekpunt A′ wederkeerig de pool is van den overstaanden boog BC, en op gelijke wijze, dat B′, C′ de polen zijn der overstaande bogen AC, AB. Nu is klaarblijkelijk

$$A'b + B'a = 180^\circ,$$

of wel $$A'B' + ab = 180^\circ,$$

en aangezien *ab* de maat is van den hoek C, zal $A'B' = 180^\circ - C$, of het supplement van den overstaanden hoek C zijn. Op gelijke

wijze betoogt men dat

$$B'C' = 180^\circ - A, \text{ en } A'C' = 180^\circ - B.$$

De bogen $Be$, $Cb$, elk een kwadrant zijnde, zoo heeft men

$$Be + Cb = BC + be = 180^\circ,$$

maar de boog $be$ de maat van den hoek $A'$ voorstellende, zoo volgt hieruit $A' = 180^\circ - BC$, eu op gelijke wijze $B' = 180^\circ - AC$, $C' = 180^\circ - AB$, waardoor de genoemde tweeledige eigenschap bewezen is.

Indien eene of twee zijden des driehoeks grooter dan een kwadrant mochten zijn, gaat de eigenschap even goed door, waarvan men zich door eene bijzondere daartoe betrekkelijke figuur gemakkelijk zal kunnen overtuigen. Het geval waarin elke der drie zijden $> 90^\circ$, wordt reeds door onze figuur zelve betoogd, dewijl $A'B'C'$ zulk een driehoek, en $ABC$ zijn pool-driehoek voorstelt. Vereenigt men voorts de hoekpunten $C$, $C'$ door een boog des grooten cirkels, snijdende de zijden $AB$, $A'B'$ in de punten $D$, $D'$, dan zal het vlak van dien boog, uithoofde $C$ de pool van $A'B'$ is, tegelijkertijd loodrecht staan op de zijden $AB$, $A'B'$, en omdat $C'D = CD' = 90^\circ$, zoo volgt hieruit tevens

$$C'D + CD' = CD + C'D' = 180^\circ.$$

*De loodrechte bogen in beide driehoeken zijn dus mede elkanders supplementen.* Uit het hiervoor betoogde kan men nu onmiddellijk de beide volgende eigenschappen der bolvormige driehoeken afleiden, namelijk:

1°. *De som der drie hoeken is altijd* $> 2R$ en $< 6R$.

2°. *De som van twee der hoeken verminderd met den derden hoek is altijd* $< 2R$.

Immers heeft men in den pool-driehoek (n°. 75)

$$B'C' + A'C' + A'B' < 4R,$$

dat is $\quad 2R - A + 2R - B + 2R - C < 4R,$

of $\quad A + B + C > 2R,$

en daar elk der drie hoeken $< 2R$, zal ook

$$A + B + C < 6R$$

moeten zijn.

Voorts heeft men in denzelfden driehoek

$$B'C' + A'C' > A'B',$$

of wel $\quad 2R - A + 2R - B > 2R - C,$

dat is $\quad A + B - C < 2R.$

Het zal later blijken welk hulpmiddel de beschouwing zoo des pool-driehoeks als der supplement-driehoeken oplevert, tot opsporing der betrekkingen tusschen de elementen van een bolvormigen driehoek.

78. Even als de vlakke driehoeken worden ook de bolvormige in *rechthoekige* en *scheefhoekige* driehoeken onderscheiden. Wanneer twee der zijvlakken BMC, AMB (fig. 32) op elkander loodrecht staan, zal de hoek B recht zijn, en ABC een rechthoekige bolvormige driehoek genaamd worden. De beide overige hoeken A, C kunnen alsdan zoo wel scherp als stomp zijn (n°. 77), en worden met den naam van scheeve hoeken bestempeld. Staat de ribbe MC tevens loodrecht op het vlak MAB, dan is ook de hoek A recht, en de zijden AC, BC zullen elk een kwadrant zijn. Daarenboven kan nog de hoek C recht zijn, als wanneer men een driehoek met drie rechte hoeken verkrijgt, waarvan elke zijde een kwadrant is, terwijl het oppervlak van zoodanigen driehoek het achtste gedeelte van dat des bols bedraagt. Is geen der hoeken recht, dan wordt de driehoek een *scheefhoekige* genaamd.

79. Onder een gelijkbeenigen bolvormigen driehoek verstaat men een zoodanigen, waarvan twee zijden even groot zijn. De hoeken aan de basis zullen alsdan insgelijks aan elkander gelijk zijn. Om zulks te betoogen, stelle ABC (fig. 35) zulk een driehoek voor; laat de basis in het punt D midden door gedeeld, en B met D door den boog eens grooten cirkels vereenigd worden. De driehoeken ABD, BDC, wier zijden elk in het bijzonder aan elkander gelijk zijn, zullen alsdan gelijke hoeken hebben. Dit volgt onmiddellijk uit de in de meetkunde betoogde eigenschap dat, wanneer de zijvlakken van twee drievlakkige hoeken elk in het bijzonder aan elkander gelijk zijn, de overeenkomstige standhoeken dezer vlakken mede aan elkander zullen gelijk zijn. Het vlak van den boog BD deelt alzoo den tophoek midden door, en zal, omdat $\llcorner$ ADB $=$ $\llcorner$ BDC, loodrecht op den boog AC staan. De driehoeken ADB, BDC zijn derhalve beide rechthoekig in D. Omgekeerd volgt nu ook terstond uit de beschouwing des pool-driehoeks, dat elke bolvormige driehoek gelijkbeenig is, wanneer twee zijner hoeken even groot zijn.

*In elken bolvormigen driehoek staat de grootste zijde tegenover den grootsten hoek, en ook omgekeerd,* Laat, om zulks te betoogen, in fig. 36 $\llcorner$ C $>$ $\llcorner$ A ondersteld worden, dan kan men door het hoekpunt C een boog CD zoodanig trekken, dat $\llcorner$ ACD

$= \angle DAC$ zij, als wanneer de driehoek ADC gelijkbeenig zal zijn. Nu is in den driehoek BDC, $CD + BD > BC$ (n°. 75), dus zal $AD + BD$ of $AB > BC$. Het omgekeerde der eigenschap wordt op gelijke wijze als bij de vlakke driehoeken betoogd, zooals onmiddellijk met behulp des pool-driehoeks kan geschieden.

Passen wij de zoo even betoogde eigenschap op den supplements-driehoek ABC (fig. 33) toe, dan zal, in de onderstelling van $BC > AC$, ook $\angle BAC > \angle ABC$ zijn, dat is indien $BC > 2R - A'C$ of $BC + A'C > 180°$, zal tevens $\angle CA'B = \angle CAB > 180° - \angle CBA'$ of $\angle BA'C + \angle CBA' > 180°$. Had men $BC < AC$ ondersteld, dan zou elke dezer sommen $< 180°$ bevonden zijn; waaruit wij deze nieuwe eigenschap des bolvormigen driehoeks leeren kennen, dat *de som van twee der hoeken grooter of kleiner dan* $180°$ *is*, *naar dat de som der overstaande zijden grooter of kleiner dan* $180°$ *is*, *en zoo ook omgekeerd;* eene belangrijke eigenschap, die, gelijk wij hierna zullen zien, een geschikt kenmerk oplevert om bij de oplossing van enkele gevallen, spoedig te doen beslissen of een der elementen scherp of stomp moet genomen worden.

Zie hier twee gevolgen, die zich uit de beide laatste eigenschappen onmiddellijk laten afleiden.

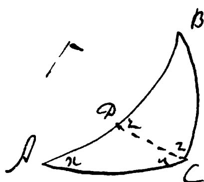
*Indien de som van twee zijden* $> 180°$, *zal de hoek over de grootste dezer zijden altijd stomp*, *en ook de zijde over den grootsten der beide hoeken gelegen*, *stomp zijn. Indien de som van twee zijden* $< 180°$, *zal de hoek over de kleinste dezer zijden altijd scherp*, *en ook de zijde over den kleinsten der beide hoeken scherp zijn.*

Na deze algemeene eigenschappen der bolvormige driehoeken verklaard te hebben, gaan wij over tot het onderzoek der betrekkingen, die tusschen hunne hoeken en zijden bestaan, en tot de oplossing der onderscheidene gevallen moeten strekken.

## § 13.

### *Afleiding der grondformulen.*

80. Daar een bolvormige driehoek even als een drievlakkige hoek in het algemeen door elke drie zijner elementen is bepaald, zullen de formulen, die de betrekkingen tusschen de elementen uitdrukken, minstens vier dezer grootheden moeten bevatten,




Maak $BD = BC$ dan is $\angle z = \angle z$

In $\triangle ADC$ is nu:

$$x + 180 - z - y < 180$$

of $\quad x < z + y$

$$x < C$$

$$A < C$$

Q.E.D.

---

(1) Is tevens $BC + AC > 180°$

dan is $A + B > 180°$

Is verder $AC > BC$

dan is $B > A$

dus à fortiori $2B > 180$

of $\quad B > 90°$

zoodat door elke betrekking een onbekend element uit drie gegevene kan opgelost worden. De zes elementen van den driehoek kunnen op vijftien manieren, vier aan vier, gecombineerd worden, zoodat er vijftien betrekkingen tusschen de verschillende elementen des driehoeks, vier aan vier moeten bestaan, opdat het mogelijk zal zijn uit elke drie gegeven elementen de drie andere onafhankelijk van elkander te berekenen. Deze vijftien betrekkingen worden genoemd de *grondformulen*; zij bevatten in hare verschillende samenstellingen de oplossing van alle vraagstukken, die in de bolvormige driehoeksmeting kunnen voorkomen. Met hare afleiding zullen wij ons in de eerste plaats bezig houden.

41. Zij ABC (fig. 37) een bolvormige driehoek, O het middelpunt van den bol, waarop hij is beschreven; trekken wij dan in een der hoekpunten A raaklijnen tot de cirkelbogen, die in dat punt samen komen, waarvan de eene AD de ribbe OB in D, en de andere de ribbe OC in E snijdt, zoo is ∟ DAE de bolvormige hoek A en tevens de standhoek der vlakken BOA en COA. Stellen wij den straal des bols gelijk aan de eenheid, dat geschieden kan, omdat hij de straal is van alle groote cirkelbogen, dus ook van hunne goniometrische grootheden, en noemen als in de vlakke driehoeksmeting de zijden met de kleine letters der overliggende hoekpunten, dus

$$\begin{aligned} boog\ AB &= \llcorner\ AOB = c, \\ boog\ AC &= \llcorner\ AOC = b, \\ boog\ BC &= \llcorner\ BOC = a, \end{aligned}$$

dan is in den rechthoekigen driehoek OAD,

$$AD = tang\, c,\ OD = sec\, c;$$

evenzoo is in △ AOE

$$AE = tang\, b,\ OE = sec\, b.$$

Verder is in △ DAE en △ DOE (n° 40).

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD\ .\ AE\ cos\, A \\ &= OD^2 + OE^2 - 2OD\ .\ OE\ cos\, a, \end{aligned}$$

dat is door substitutie der voorgaande waarden,

$$tang^2 c + tang^2 b - 2\, tang\, c\, tang\, b\, cos\, A = sec^2 c + sec^2 b - 2\, sec\, c\, sec\, b\, cos\, a,$$

of, omdat $sec^2 a = 1 + tang^2 a$,

$$\begin{aligned} -\,2\, tang\, c\, tang\, b\, cos\, A &= 2 - 2\, sec\, c\, sec\, b\, cos\, a, \\ sec\, c\, sec\, b\, cos\, a &= 1 + tang\, c\, tang\, b\, cos\, A, \end{aligned}$$

vermenigvuldigende met $\cos b \cos c$:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

zijnde eene betrekking tusschen vier elementen eens bolvormigen driehoeks.

Door dezelfde bewerking op elk der hoekpunten toe te passen of ook volgens den gewonen regel der symmetrie, vindt men door behoorlijke omzetting van letters:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Daar in deze drie formulen de zes elementen des driehoeks voorkomen, zouden zij, streng genomen, voldoende zijn voor de oplossing van alle gevallen der driehoeksmeting, omdat men, de drie gevraagde elementen als onbekenden beschouwende, altijd drie vergelijkingen met drie onbekenden zou hebben. In de meeste gevallen echter zou de oplossing groote moeilijkheden opleveren en de vergelijkingen tot hoogen graad opklimmen, weshalve het beter is de andere betrekkingen, die tusschen de elementen moeten bestaan, op te sporen. Die betrekkingen kunnen alle door herleiding uit de formulen (1) worden afgeleid, om welke reden wij aan deze den naam van *hoofdformulen* zullen geven.

82. Uit de eerste formule (1) volgt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

derhalve

$$\sin A = \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}}$$

$$= \frac{\sqrt{\{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2\}}}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\sqrt{\{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c\}}}{\sin b \sin c}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{\{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c\}}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Het tweede lid dezer vergelijking is geheel symmetrisch ten opzichte der grootheden $a$, $b$, $c$, en ondergaat dus geene verandering, wanneer de letters behoorlijk verwisseld worden; der-

(1) dat is de Cosinusformule voor de zijde.

Anders:

$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$

$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B$

Verhef in het kwadraat en trek af; [illegible] bij elkaar.

[illegible] 24/2 06.

halve moet hetzelfde met het eerste lid het geval zijn, hetgeen alleen kan plaats hebben, wanneer

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

waaruit wij leeren, dat *in elken bolvormigen driehoek de sinussen der zijden evenredig zijn aan de sinussen der tegenovergelegen hoeken.* De standvastige verhouding tusschen den sinus eens hoeks en den sinus eener tegenovergelegen zijde wordt de *modulus* van den driehoek genoemd, zoodat

$$M = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

De formule (2) wordt overeenkomstig hiermede de *sinus-* of *modulus-formule* genoemd.

83. Door achtereenvolgens de waarde voor $\cos c$ uit de derde in de eerste en die van $\cos b$ uit de tweede in de eerste der formulen (1) over te brengen, volgt:

$$\cos a = \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a = \cos c\,(\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B) + \sin b \sin c \cos A;$$

of
$$\cos a\,(1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a\,(1 - \cos^2 c) = \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A;$$

deelende de eerste door $\sin b$, de tweede door $\sin c$,

$$\left.\begin{array}{l} \cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A \\ \cos a \sin c = \sin a \cos c \cos B + \sin b \cos A \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

Deelt men nogmaals beiden formulen door $\sin a$, en stelt daarna volgens (2)

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

zoo volgt:
$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \cot A \sin C$$
$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \cot A \sin B,$$

en deze beide, als bevattende ieder vier elementen, behooren weder tot de grondformulen. Door behoorlijke verwisseling van letters, geven zij het volgende stelsel:

$$\left.\begin{array}{l} \cot a \sin b = \sin C \cot A + \cos b \cos C \\ \cot a \sin c = \sin B \cot A + \cos c \cos B \\ \cot b \sin a = \sin C \cot B + \cos a \cos C \\ \cot b \sin c = \sin A \cot B + \cos c \cos A \\ \cot c \sin a = \sin B \cot C + \cos a \cos B \\ \cot c \sin b = \sin A \cot C + \cos b \cos A \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

*

Deze zes grondformulen worden ter onderscheiding van de anderen *de formulen der cotangenten* genoemd. Den opmerkzamen leerling zal het niet moeilijk vallen een regel te ontdekken, waardoor deze formulen gemakkelijk in het hoofd zijn te prenten.

84. Om het laatste stel grondformulen te ontdekken, keeren wij terug tot de voorgaande formulen (*b*), en nemen daarvan:

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \mathrm{C} + \sin c \cos \mathrm{A},$$

evenzoo is

$$\cos b \sin a = \sin b \cos a \cos \mathrm{C} + \sin c \cos \mathrm{B};$$

door de laatste met $\cos \mathrm{C}$ te vermenigvuldigen en bij de eerste op te tellen, volgt:

$$\cos a \sin b = \cos a \sin b \cos^2 \mathrm{C} + \sin c\,(\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}),$$

dus $\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} = \cos a \dfrac{\sin b}{\sin c}\,(1 - \cos^2 \mathrm{C});$

daar echter

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}},$$

wordt $\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} = \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \cos a$

of $\cos \mathrm{A} = -\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \cos a;$

door behoorlijke omzetting van letters, verkrijgen wij hieruit

$$\left.\begin{aligned}\cos \mathrm{A} &= -\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \cos a\\ \cos \mathrm{B} &= -\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{C} \cos b\\ \cos \mathrm{C} &= -\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} + \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \cos c\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (4)$$

en hiermede is het stelsel van vijftien grondformulen volledig gevonden. Door de formulen (1) — (4) moeten dus alle gevallen der driehoeksmeting opgelost kunnen worden.

85. De voorgaande afleiding der grondformulen, het eerst door Euler en Lagrange gegeven, verdient de voorkeur, omdat hierbij alle uit eene enkele, die wij de hoofdformule hebben genoemd, zijn gevonden. Wij zullen nu tot bevestiging en toelichting aantoonen, hoe zij ook door meetkundige beschouwing aan de figuur kunnen ontleend worden.

Daartoe laten wij uit een der hoekpunten B (fig. 37) eene loodlijn BG neer op het overstaande zijvlak, trekken BH en BL loodrecht op OA en OC, dan zijn volgens bekende meetkundige eigenschappen ook GH en GL loodrecht op OA en OC, zoodat de hoeken BHG en BLG de standhoeken op de ribben OA en OC, dat zijn de hoeken A en C, voorstellen. Trekken wij nog HI

(1) Dit is de Cornus [illegible] voor den boek.

evenwijdig aan GL en GK evenwijdig aan OC, dan is de figuur voor ons doel volledig.

Nu is:

1e. $$OL = OI + IL.$$

Maar $$OL = OB \cos a = \cos a.$$

$$OI = OH . \cos b = OB \cos c . \cos b = \cos c \cos b,$$

$$IL = KG = HG \sin GHK,$$

of, omdat wegens onderling loodrechten stand der beenen,

$$\llcorner GHK = \llcorner AOC = b,$$

en $HG = BH \cos A = OB \sin c . \cos A = \sin c . \cos A$,

wordt $$IL = \sin b \sin c \cos A,$$

door substitutie volgt

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zijnde de hoofdformule, op eene andere wijze dan in het begin dezer paragraaf uit de figuur afgeleid.

2e. De rechthoekige driehoeken BHG en BLG geven:

$$BG = BH \sin A = BL \sin C$$

of $$\sin c \sin A = \sin a \sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zijnde de sinus of modulus-formule.

3e. $$IH = IK + KH.$$

Hierin is

$$IH = OH \sin b = \sin b \cos c,$$
$$IK = LG = BL \cos C = \sin a \cos C,$$
$$KH = GH \cos GHK = GH \cos b$$
$$= BH \cos A \cos b = \cos b \sin c \cos A;$$

derhalve

$$\sin b \cos c = \sin a \cos C + \cos b \sin c \cos A,$$

of door $\sin c$ deelende en $\frac{\sin a}{\sin c}$ door $\frac{\sin A}{\sin C}$ vervangende

$$\cot c \sin b = \sin A \cot C + \cos b \cos A \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zijnde eene der cotangenten-formulen.

Passen wij nu de formulen (1)—(3) toe op den pool-driehoek, waarvan de gelijknamige elementen door accenten zullen aangeduid worden, dan is

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A',$$
$$\sin c' \sin A' = \sin a' \sin C',$$
$$\cot c' \sin b' = \sin A' \cot C' + \cos b' \cos A',$$

verwangende hierin, overeenkomstig de eigenschappen van den pooldriehoek (n° 77), $a'$ door $180^\circ - A$, $A'$ door $180^\circ - a$, enz., dan wordt

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - B)$$
$$\sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - a),$$
$$\sin(180^\circ - C)\sin(180^\circ - a) = \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - c),$$
$$\cot(180^\circ - C)\sin(180^\circ - B) = \sin(180^\circ - a)\cot(180^\circ - c) +$$
$$\cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - a),$$

of

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$\sin C \sin a = \sin A \sin c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$\cot c \sin a = \sin B \cot C + \cos a \cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Op deze wijze is uit formule (1) eene formule (4) gevonden, formule (2) bleef onveranderd, formule (3) geeft eene andere formule van hetzelfde stelsel terug. Door behoorlijke verwisseling van letters verkrijgen wij derhalve het geheele stel der vijftien grondformulen.

§ 14.

*Formulen voor de rechthoekige driehoeken.*

86. Is in een bolvormigen driehoek een der hoeken recht, dan zijn twee gegevens voldoende om den driehoek te bepalen. De formulen, die de betrekkingen tusschen de elementen uitdrukken, mogen derhalve slechts drie grootheden bevatten, en daar vijf grootheden drie aan drie op tien wijzen kunnen gecombineerd worden, zal men voor de oplossing van alle gevallen tien formulen moeten hebben. Deze kunnen gemakkelijk uit de grondformulen worden afgeleid door een der hoeken als recht aan te nemen.

Stellen wij in de formulen (1)—(4) der vorige paragraaf $C = 90^\circ$, dan wordt $c$ de hypotenusa: $a$ en $b$ zijn de rechthoekszijden, A en B de scheeve hoeken.

De grondformulen, waarin A niet voorkomt, komen voor de rechthoekige driehoeken niet in aanmerking, omdat zij meer dan drie elementen bevatten.

De formulen (1) geven nu

$$\cos c = \cos a \cos b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De formulen (2) gaan over in

$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \sin c \, \sin A \\ \sin b &= \sin c \, \sin B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

De formulen (3) worden

$$\cot a \, \sin b = \cot A ,$$
$$\cot b \, \sin a = \cot B ,$$
$$\cot c \, \sin a = \cos a \, \cos B ,$$
$$\cot c \, \sin b = \cos b \, \cos A ,$$

of:

$$\left.\begin{aligned} \tan a &= \sin b \, \tan A \\ \tan b &= \sin a \, \tan B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \tan a &= \tan c \, \cos B \\ \tan b &= \tan c \, \cos A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Eindelijk geven de formulen (4,

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \cos a \, \sin B \\ \cos B &= \cos b \, \sin A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

en $\cos A \cos B = \sin A \sin B \cos c$

of $\cos c = \cot A \cot B$ . . . . . . . . (10)

waardoor de tien aangekondigde *grondformulen voor de rechthoekige driehoeken* gevonden zijn.

87. Voor dat wij tot de nadere beschouwing dezer formulen overgaan, is het niet ondienstig aan te toonen, hoe zij onafhankelijk van de oorspronkelijke grondformulen op zichzelven uit eene figuur kunnen gevonden worden.

Zij namelijk ABC (fig. 38) een bolvormige driehoek, die rechthoekig is in C en zij BE loodrecht op MA, BD loodrecht op MC, zoodat ∟ BED = A is. Nu volgt uit △ MED

$$ME = MD \cos b$$

of $\cos c = \cos a \cos b$ . . . . . . . . (5)

In △ BED is

$$BD = BE \sin A$$

of $\sin a = \sin c \, \sin A$ . . . . . . . . (6)

en $BD = ED \tan A$;

maar in △ MED is

$$ED = MD \sin b = \cos a \sin b ,$$

derhalve door substitutie in de voorgaande

$$\sin a = \cos a \, \sin b \, \tan A ,$$

of $\tan a = \sin b \, \tan A$ . . . . . . . . (7)

Eindelijk is nog

$$ED = BE \cos A ;$$

maar $ED = ME \tan b = \cos c \tan b$,

$BE = MB \sin c = \sin c$,

derhalve $\cos c \tan b = \sin c \cos A$,

of $\tan b = \tan c \cos A$ . . . . . . . . . (8)

Nemen wij de verg. (6) en (8) in dezen vorm

$$\sin a = \sin c \sin A$$

$$\tan a = \tan c \cos B,$$

dan volgt door deeling

$$\cos a = \cos c \frac{\sin A}{\cos B},$$

of, omdat ingevolge (5) $\frac{\cos c}{\cos a} = \cos b$,

$$\cos B = \cos b \sin A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

evenzoo is

$$\cos A = \cos a \sin B$$

en deze vermenigvuldigende

$$\cos B \cos A = \cos b \cos a \sin A \sin B,$$

of, volgens (5)

$$\cos c = \cot A \cot B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

waardoor alle formulen terug zijn gevonden.

88. De eenvoudige vorm, waarin al de formulen der rechthoekige driehoeken voorkomen, maakt het gemakkelijk ze op de volgende wijze in woorden uit te drukken en daardoor in het geheugen te prenten.

1e. *De cosinus der hypotenusa is gelijk aan het product van de cosinussen der rechthoekszijden en ook gelijk aan het product van de cotangenten der scheeve hoeken.*

2e. *De sinus van elke rechthoekszijde is gelijk aan het product van den sinus der hypotenusa en den sinus van den tegenovergelegen hoek.*

3e. *De tangens van elke rechthoekszijde is gelijk aan het product van den sinus der andere rechthoekszijde en den tangens van den overstaanden hoek.*

4e. *De tangens van elke rechthoekszijde is gelijk aan het product van den tangens der hypotenusa en den cosinus van den aangelegen hoek.*

5e. *De cosinus van elken scheeven hoek is gelijk aan het product van den cosinus der tegenoverliggende zijde en den sinus van den anderen scheeven hoek.*

(1) Maar zij op dezelfde wijze van elkaar afhangen. Heeft men toch 3 zijden, dan is het 5e hoekpunt de pool van den middelsten boog. Men kan beginnen, waar men wil, men krijgt steeds denzelfden vijfhoek; waaruit dan blijkt, dat zij op dezelfde manier van elkaar afhangen. Analogie; alle dezelfde beteekenis in de figuren

Verder doen ons de voorgaande formulen de volgende eigenschappen der rechthoekige bolvormige driehoeken kennen.

*De hypotenusa zal scherp zijn, indien de rechthoekszijden of de scheeve hoeken beide scherp of beide stomp, dat is, gelijksoortig zijn. De hypotenusa zal stomp zijn, indien de beide rechthoekszijden of de beide scheeve hoeken ongelijksoortig zijn. Elke scheeve hoek is van dezelfde soort als de overstaande rechthoekszijde, dat is, indien eene dezer zijden* $< = $ *of* $>$ $90^{0}$, *zal ook de overstaande hoek* $< =$ *of* $>$ $90^{0}$ *zijn, en omgekeerd.*

80. Er bestaat een eenvoudig hulpmiddel om de formulen voor de rechthoekige driehoeken in een enkelen regel samen te vatten, en aldus het geheugen te gemoet te komen.

ABC (fig. 39) zij namelijk een willekeurige rechthoekige driehoek. Men neme op den bol nog drie andere punten D, E, F, die de polen zijn der bogen AC, AB, BC, dan is het duidelijk, vooreerst, dat de punten D en F in het verlengde der bogen CB, CA zullen liggen, en de bogen CF, CD elk een kwadrant zullen zijn. Vereenigt men nu de punten D, E, F door bogen van groote cirkels, en trekt men uit A dergelijke bogen naar E en D, die noodzakelijk elk een kwadrant zullen zijn, dan zal het punt A de pool van den boog DE, en even zoo het punt B die van den boog EF zijn. Verder heeft men $\angle$ EAB $=$ $\angle$ DAC $=$ $90^{0}$. Derhalve $\angle$ BAC $=$ $\angle$ EAD $=$ *boog* ED. Op gelijke wijze betoogt men, dat $\angle$ ABC $=$ *boog* EF.

De bolvormige vijfhoek ABDEF is alzoo van dien aard, dat hij door drie op elkander volgende hoekpunten geheel bepaald wordt, dewijl de twee overige hoekpunten, zoo als uit de figuur terstond op te maken is, steeds de polen zijn der twee bogen, welke de drie gegevene hoekpunten naar rangorde vereenigen. Hieruit mag men besluiten, dat elke betrekking tusschen drie achtervolgende zijden des vijfhoeks, insgelijks van toepassing zal zijn op drie andere zijner zijden, elkander in gelijke rangorde opvolgende.

Dit opgemerkt hebbende, zoo neme men eene der tien formulen (5)—(10), bijv. formule (6), als bewezen aan, en brenge deze op den vijfhoek over, wiens zijden blijkbaar van de vijf elementen des driehoeks afhankelijk zijn, dan zal, omdat in den driehoek ABC

$$\sin BC = \sin AB \sin A,$$

voor den vijfhoek

$$\cos BD = \sin AB \sin DE$$

zijn; welke betrekking aldus in woorden kan uitgedrukt worden:

*De cosinus van eene der zijden des vijfhoeks is gelijk aan het product der sinussen van de beide aangrenzende zijden.* (*a*)

Passen wij nu deze eigenschap op elke der overige vier zijden toe, hierbij acht gevende dat

$$DE = \llcorner A,\ FE = \llcorner B,\ BD = 90^0 - a \text{ en } AF = 90^0 - b,$$

dan verkrijgen wij achtereenvolgens:

$$\begin{array}{lcl} \cos DE = \sin BD \sin EF & \text{of} & \cos A = \cos a \sin B \\ \cos FE = \sin AF \sin DE & „ & \cos B = \cos b \sin A \\ \cos FA = \sin AB \sin EF & „ & \sin b = \sin c \sin B \\ \cos AB = \sin AF \sin BD & „ & \cos c = \cos a \cos b\,; \end{array}$$

welke formulen met de hiervoor gevondene (9), (5), (6), volkomen overeenstemmen. Uit den zoo even gevonden regel (*a*) laat zich thans een tweede afleiden, welke ons de vijf overige formulen zal opleveren.

Men vermenigvuldige namelijk de beide voorgaande vergelijkingen

$$\begin{array}{l} \cos BD = \sin AB \sin DE \\ \cos DE = \sin BD \sin EF \end{array}$$

met elkander, dan geeft haar product

$$\cot BD \cot DE = \sin AB \sin EF = \cos AF\,;$$

welke vergelijking eene betrekking bevat tusschen eene zijde des vijfhoeks, en twee andere daarop niet onmiddellijk volgende of twee afgelegene zijden. Men kan die nieuwe betrekking aldus uitdrukken:

*De cosinus van eene der zijden is gelijk aan het product der cotangenten van de beide afgelegene zijden.* (*b*)

De toepassing daarvan op elke zijde des vijfhoeks zal achtereenvolgens geven:

$$\begin{array}{lclcl} \cos AB = \cot DE \cot EF & \text{of} & \cos c = \cot A \cot B & & \\ \cos BD = \cot AF \cot FE & „ & \sin a = tg\, b \cot B & \text{of} & tg\, b = \sin a\, tg\, B \\ \cos DE = \cot AB \cot AF & „ & \cos A = \cot c\, tg\, b & „ & tg\, b = tg\, c \cos A \\ \cos FE = \cot AB \cot BD & „ & \cos B = \cot c\, tg\, a & „ & tg\, a = tg\, c \cos B \\ \cos AF = \cot BD \cot DE & „ & \sin b = tg\, a \cot A & „ & tg\, a = \sin b\, tg A, \end{array}$$

welke formulen met (10), (7) en (8) geheel overeenstemmen.

Uit de beide voorgaande regels laat zich terstond het nuttige gebruik inzien, dat van den bedoelden vijfhoek te maken is bij de oplossing van de onderscheidene gevallen der rechthoekige

driehoeken. Men behoeft namelijk slechts de drie elementen des driehoeks, waarvan twee tot de gegevens behooren, en de derde de onbekende is, in den vijfhoek over te brengen, en dan zal de eerste of tweede regel, naar dat de drie elementen al dan niet op elkander volgen, de formule opleveren, waardoor zich de onbekende zijde of hoek uit de beide gegeven elementen laat berekenen.

90. Men kan echter, en deze opmerking is niet onbelangrijk, de beide hiervoren verkregen regels ($a$) en ($b$) in diervoege wijzigen, dat hun gebruik geheel onafhankelijk worde van de beschouwing des vijfhoeks, zoodat zij hierdoor onmiddellijk op den driehoek zelven van toepassing te maken zijn. Te dien einde denke men zich de zijden en hoeken des driehoeks (den rechten hoek hierbij niet mede rekenende) in geregelde orde op elkander te volgen, dan zal het, uit de inzage der figuur, gemakkelijk blijken, dat de *aangrenzende* elementen of deelen in den driehoek, zullen overeenkomen met de *afgelegene* in den vijfhoek, en zoo ook omgekeerd, mits hierbij de twee rechthoekszijden door hare complementen vervangende. Bij samentrekking dezer beide regels ontstaat hieruit alsdan de navolgende enkele regel voor de oplossing van alle gevallen der rechthoekige driehoeken, welke, naar den wiskundige, die hem het eerst bekend maakte, de regel van NEPER genaamd wordt, te weten:

*De cosinus van een der deelen of elementen des driehoeks is gelijk aan het product der sinussen van de afgelegen deelen, of gelijk aan dat der cotangenten van de aangrenzende deelen, mits hierbij voor elke rechthoekszijde haar complement nemende.*

Van dezen vrij eenvoudigen regel, die gemakkelijk in het geheugen te prenten is, zal men zich steeds met vrucht kunnen bedienen, zoo dikwerf men in de oplossing van een der gevallen, de daartoe betrekkelijke formule niet meer voor den geest mocht hebben. Bij het gebruik daarvan zal men slechts behooren in acht te nemen, om de drie elementen, tusschen welke eene betrekking gezocht wordt, in dier voege te rangschikken, dat twee daarvan als *aangrenzende* of wel als *afgelegene* deelen ten aanzien van het derde of *middelste* deel te beschouwen zijn, hetgeen, zoo als uit het volgende tafeltje zal blijken, altijd mogelijk is; moetende hierbij, gelijk hierboven reeds opgemerkt is, de rechte hoek niet mede gerekend, en voor de rechthoekszijden hare complementen genomen worden.

| *Middelste deel.* | *Aangrenzende deelen.* | *Afgelegene deelen.* |
|---|---|---|
| $c$. | A , B. | $a$ , $b$. |
| $b$. | A , $a$. | $c$ , B. |
| $a$. | B , $b$. | $c$ , A. |
| A. | $b$ , $c$. | $a$ , B. |
| B. | $a$ , $c$. | $b$ , A. |

## § 15.

### *Oplossing der rechthoekige driehoeken.*

91. Volgens het geleerde in § 12 moeten de hoeken eens bolvormigen driehoeks voldoen aan de voorwaarden

$$A + B + C > 2R,$$
$$A + B - C < 2R,$$
$$A - B + C < 2R.$$

Stellende hierin $C = R$, dan verkrijgt men als betrekkingen tusschen de scheeve hoeken van een rechthoekigen driehoek

$$3R > A + B > R$$
$$A - B < R,$$

dat is in woorden: *de som der scheeve hoeken moet gelegen zijn tusschen drie en één rechten hoek en het verschil kleiner zijn dan een rechte hoek.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is een rechthoekige driehoek door twee elementen behalve den rechten hoek bepaald. Derhalve kan de driehoek opgelost worden, wanneer gegeven zijn:

1e. de hypotenusa en een scheeve hoek.
2e. de hypotenusa en eene rechthoekszijde.
3e. de beide rechthoekszijden.
4e. de beide scheeve hoeken.
5e. eene rechthoekszijde met den aangrenzenden scheeven hoek.
6e. eene rechthoekszijde met den overstaanden hoek.

Deze zes gevallen zullen wij achtereenvolgens gaan behandelen, daarbij telkens als bij de vlakke driehoeken de voorwaarden noemende waaraan de gegevens moeten voldoen, opdat de driehoek bestaanbaar zij, en bij elk geval een voorbeeld in getallen voegen. Slechts moet men in het oog houden om telkens die formulen te kiezen, waardoor elk der onbekenden onmiddellijk in de gegevens wordt uitgedrukt.

## 1ste GEVAL.

*Gegeven zijnde de hypotenusa c met een der scheeve hoeken* A, *den anderen scheeven hoek* B, *benevens de beide rechthoekszijden a en b te berekenen.*

De gegevens behoeven aan geene voorwaarden te voldoen.

*Oplossing.* Hiertoe gebruikt men de formulen

$\sin a = \sin c \sin A$, $\quad tg\, b = tg\, c \cos A$, $\quad \cot B = \cos c\, tg\, A$

*Voorbeeld.* Zij $c = 71^0\ 24'\ 30''$. $\quad A = 105^0\ 52'\ 39''$.

*Berekening.*

$\log \sin c = 9{,}9767235$
$\log \sin A = 9{,}9831068$
$\log \sin a = 9{,}9598303$
$a = 114^0\ 15'\ 54''$

De zijde $a$ moet $> 90^0$, uithoofde A $> 90^0$.

$\log tg\, c = 0{,}4731759$
$\log \cos A = 9{,}4370868-$
$\log tg\, b = 9{,}9102627-$
$b = 140^0\ 52'\ 40''$

De zijde $b$ moet $> 90^0$, vermits $tg\ b$ negatief is.

$\log \cos c = 0{,}5035475$
$\log tg\, A = 0{,}5460201-$
$\log \cot B = 0{,}0495676-$
$B = 138^0\ 15'\ 45''.4$.

De hoek B moet $> 90^0$ zijn, vermits $\cot$ B negatief is, of ook uithoofde de zijde $b > 90^0$ is.

Uit de gevonden zijde $a$ zou men de andere rechthoekszijde $b$ insgelijks kunnen berekenen door de formule

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}.$$

*Aanmerking.* Bijaldien de zijde $a$ dicht bij $90^0$ is, en alzoo uit haren sinus niet zeer nauwkeurig kan berekend worden, zal men de eerste formule de navolgende verandering doen ondergaan. Men heeft namelijk

$$\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \frac{1 - \sin c \sin A}{1 + \sin c \sin A}.$$

Zij $tg\, \varphi = \sin c \sin A$, dan komt er

$$tg\,(45^0 - \tfrac{1}{2}a) = \pm \sqrt{\frac{1 - tg\,\varphi}{1 + tg\,\varphi}} = \pm \sqrt{tg\,(45^0 - \varphi)}\,;$$

zijnde alsnu $45^0 - \frac{1}{2}a$ een kleine hoek. Het dubbele teeken voor

de wortelgrootheid zal, even als in de voorgaande oplossing, twee verschillende waarden voor $a$ opleveren, die elkanders supplementen zijn, en wier keuze door den overstaanden hoek A bepaald wordt. (1)

## II$^{de}$ GEVAL.

*Gegeven zijnde de hypotenusa c met eene rechthoekszijde a, de andere rechthoekszijde b, benevens de beide scherpe hoeken te berekenen.*

*Oplossing.* De form. (5), (6) en (8) geven

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \qquad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad \cos B = \frac{tg\, a}{tg\, c}.$$

Tot de bestaanbaarheid des driehoeks wordt gevorderd, dat

$$\begin{array}{ll} c > a & \text{indien } a \text{ en } c \text{ beide} < 90^0 \\ c < a & \text{,, } a \text{ ,, } c \text{ ,, } > 90^0 \\ c + a > 180^0, & \text{,, } a > 90^0 \text{ en } c < 90^0 \\ c + a < 180^0, & \text{,, } a < 90^0 \text{ ,, } c > 90^0. \end{array}$$

*Voorbeeld.* Zij $c = 95^0\ 39'\ 20.$ $a = 72^0\ 25'\ 2''.$

*Berekening.*

$$\begin{array}{ll} \log \cos c = 8{,}9936472- & \log \sin a = 9{,}9792211 \\ \log \cos a = \underline{9{,}4801269} & \log \sin c = \underline{9{,}9978808} \\ \log \cos b = 9{,}5135203- & \log \sin A = 9{,}9813403 \\ b = 109^0\ 2'\ 23'',8 & A = 73^0\ 19'\ 27'',6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log tg\, a = 0{,}4990943 \\ \log tg\, c = \underline{1{,}0042337-} \\ \log \cos B = 9{,}4948606- \\ B = 180^0\ 12\ 37'',5. \end{array}$$

*Aanmerking.* Uit de drie voorgaande formulen kan men gemakkelijk nog de volgende afleiden.

$$tg\, \tfrac{1}{2} b = \pm \sqrt{tg\, \tfrac{1}{2}(c+a)\, tg\, \tfrac{1}{2}(c-a)}$$

$$tg\,(45^0 - \tfrac{1}{2} A) = \pm \sqrt{\frac{tg\, \tfrac{1}{2}(c-a)}{tg\, \tfrac{1}{2}(c+a)}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} B = \pm \sqrt{\frac{\sin(c-a)}{\sin(c+a)}},$$

wier gebruik verkieslijk is, ingeval het onbekende element niet nauwkeurig genoeg uit zijn sinus of zijn cosinus kan berekend worden.

(1) Dit is namelijk omdat log sin $a$ = b.v. 9.99998 of 9.99994 een juiste bepaling (dit tafel) onmogelijk maakt. Er zijn vele hoeken, waarvan log sin deze waarde heeft. $a$ is dan onzeker te bepalen (dicht bij 45°). Nu kan men uit $tg(45° - \frac{1}{2}a) = \pm \sqrt{tg(45° - a)}$ door Maskelyne de hoek $45° - \frac{1}{2}a$ vinden, doch daar men nu tangenten heeft, zou directe interpolatie zelfs bij $Lg'$ geen groot verschil opleveren.

## III$^{de}$ GEVAL.

*Gegeven zijnde de beide rechthoekszijden, te berekenen de hypotenusa, zoo mede elk der scheeve hoeken*

Tusschen de gegevens bestaat geene voorwaarde.

*Oplossing.* De onbekenden zullen gevonden worden door de form. (5) en (7),

$$\cos c = \cos a \cos b. \qquad tg\,A = \frac{tg\,a}{\sin b}. \qquad tg\,B = \frac{tg\,b}{\sin a}.$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 76° 33' 10''$. $b = 103° 18' 30''$.

*Berekening.*

$$\begin{aligned} \log \cos a &= 9{,}3665155 \\ \log \cos b &= 9{,}3620889 - \\ \hline \log \cos c &= 8{,}7286044 - \\ c &= 93° 4' 6'',9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log tg\,a &= 0{,}6214118 \\ \log \sin b &= 9{,}9881777 \\ \hline \log tg\,A &= 0{,}6332341 \\ A &= 76° 54' 4'',6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log tg\,b &= 0{,}6260888 \\ \log \sin a &= 9{,}9879273 \\ \hline \log tg\,B &= 0{,}6381615 - \\ B &= 102° 57' 21'',4. \end{aligned}$$

## IV$^{de}$ GEVAL.

*Gegeven zijnde de beide scheeve hoeken, te vinden de hypotenusa en de beide rechthoekszijden.*

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarden

$$270° > A + B > 90°. \quad A - B < \pm 90°.$$

*Oplossing.* Hiertoe gebruikt men de formulen (10) en (9).

$$\cos c = \cot A \cot B. \qquad \cos a = \frac{\cos A}{\sin B}. \qquad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

*Voorbeeld.* Zij $A = 97° 13' 14'',9$. $B = 104° 45' 20'',9$.

Men zal door toepassing der voorgaande formulen vinden

$c = 88° 5' 14'',54$. $a = 97° 28' 6'',41$. $b = 104° 52' 35'',32$.

*Aanmerking.* Ter berekening der zijde $c$ zal men ook de volgende formule uit (10) kunnen afleiden:

$$tg\,\tfrac{1}{2}c = \pm \sqrt{-\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}}.$$

Insgelijks geven de form. (9),

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,a = \pm \sqrt{tg\,[\tfrac{1}{2}\,(A - B) + 45^{0}]\,tg\,[\tfrac{1}{2}\,(A + B) - 45^{0}]}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,b = \pm \sqrt{tg\,[\tfrac{1}{2}\,(B - A) + 45^{0}]\,tg\,[\tfrac{1}{2}\,(A + B) - 45^{0}]};$$

welke laatste formulen eene toepassing vinden, ingeval eene der onbekende zijden eene geringe waarde heeft, en dus door zijn cosinus niet nauwkeurig te bepalen is.

## V^de GEVAL.

*Gegeven zijnde eene rechthoekszijde a met den aangrenzenden scheeven hoek* B, *de drie overige onbekende elementen te vinden.*

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen.

*Oplossing.* De form. (7), (8) en (9) geven

$$tg\,b = sin\,a\;tg\,B. \qquad tg\,c = \frac{tg\,a}{cos\,B}. \qquad cos\,A = cos\,a\;sin\,B.$$

*Voorbeeld.* Zij $a = 125^{0}\,26'\,40'',3.$ $B = 95^{0}\,10'\,30'',2$

Door toepassing der voorgaande formulen zal men vinden

$b = 96^{0}\,20'\,36'',8.$ $c = 86^{0}\,19'\,34'',6.$ $A = 125^{0}\,16'\,42'',4.$

*Aanmerking.* Stellende $cos\,a\;sin\,B = tg\,\varphi$, dan zal men ter berekening van den hoek A, ingeval deze eene geringe waarde heeft, nog de volgende formule verkrijgen:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,A = \pm \sqrt{tg\,(45^{0} - \varphi)}.$$

## VI^de GEVAL.

*Gegeven zijnde eene rechthoekszijde a met den overstaanden hoek* A, *de drie overige onbekende elementen te vinden.*

*Oplossing.* Hiertoe gebruikt men de formulen (6), (7) en (9), gevende

$$sin\,c = \frac{sin\,a}{sin\,A}. \qquad sin\,b = \frac{tg\,a}{tg\,A}. \qquad sin\,B = \frac{cos\,A}{cos\,a}.$$

Tot de bestaanbaarheid van den driehoek wordt gevorderd:

1°. dat de zijde $a$ en de hoek A gelijksoortig zijn.

2°. dat $A >$ of $< a$, naar dat elk $<$ of $>$ 90° is.

Dit zesde geval wordt het *twijfelachtige* bij de rechthoekige driehoeken genaamd, dewijl elk der drie onbekenden door zijn sinus bepaald wordende, voor twee verschillende waarden, die elkanders supplementen zijn, vatbaar is; waaruit alzoo twee verschillende

driehoeken moeten ontstaan, welke beiden met de gegevens overeenstemmen. Dit kan nader aanschouwelijk gemaakt worden met behulp van fig. 33, alwaar, in de onderstelling dat $\llcorner$ ABC recht is, BCA′ den supplements-driehoek van den rechthoekigen driehoek ABC voorstelt, dezelfde zijde $a$ en een gelijken overstaanden hoek bezittende, terwijl de drie overige elementen $b$, $c$, C, de supplementen zijn van die in den driehoek ACB.

Bij het doen der keuzen tusschen de scherpe en stompe hoeken of zijden, zal men dienen te zorgen, om deze zoodanig met elkander te doen overeenstemmen, dat hierdoor aan de vereischten, ten slotte van n°. 88 vermeld, voldaan worde.

1°. *Voorbeeld.* Zij $A = 76°\ 13'\ 24.$ $a = 24°\ 14'\ 49'',06.$ Men zal vinden

$$c = 25°\ 0'\ 49'',3. \quad b = 6°\ 20'\ 25'',45. \quad B = 15°\ 8'\ 33'',9.$$
of $$c = 154°\ 59'\ 10'',7. \quad b = 173°\ 39'\ 34'',55. \quad B = 164°\ 51'\ 26'',1.$$

2°. *Voorbeeld.* Zij $a = 93°\ 21'\ 12''.$ $A = 91°\ 41'\ 17''.$ Men zal vinden

$$c = 87°\ 6'\ 7'',8. \quad b = 149°\ 48'\ 12'',7. \quad B = 149°\ 45'\ 38'',9.$$
of $$c = 91°\ 53'\ 42'',2. \quad b = 30°\ 11'\ 47'',3. \quad B = 30°\ 14'\ 21'',1.$$

*Aanmerking.* Voor het geval, waarin een of meer der onbekende elementen weinig van 90° verschilt, zal men zich van de navolgende uit (6), (7) en (9) af te leiden formulen kunnen bedienen.

$$tg\,(45° - \tfrac{1}{2}\,c) = \pm \sqrt{\frac{tg\,\tfrac{1}{2}\,(A - a)}{tg\,\tfrac{1}{2}\,(A + a)}}$$

$$tg\,(45° - \tfrac{1}{2}\,b) = \pm \sqrt{\frac{sin\,(A - a)}{sin\,(A + a)}}$$

$$tg\,(45° - \tfrac{1}{2}\,B) = \pm \sqrt{tg\,\tfrac{1}{2}\,(A + a)\; tg\,\tfrac{1}{2}\,(A - a)}.$$

Men zal zich nu verdere oefening in de oplossing der rechthoekige driehoeken kunnen verschaffen, door elk der hiervoren uitgewerkte driehoeken, waarvan de vijf elementen thans bekend zijn, tot voorbeelden te nemen, en uit twee willekeurige elementen van elken driehoek de drie overige te berekenen.

92. Alvorens tot de behandeling der scheefhoekige driehoeken in het algemeen over te gaan, zullen wij nog eene bijzondere klasse van driehoeken, *rechtzijdige* genaamd, beschouwen, hebbende eene der zijden gelijk aan een kwadrant. Aangezien deze driehoeken ontstaan uit het construeeren van den pooldriehoek eens rechthoekigen driehoeks, zoo zal men, naar aanleiding der

9

in n°. 77 betoogde eigenschappen, de betrekkingen tusschen de elementen der rechtzijdige driehoeken, onmiddellijk uit die voor de rechthoekige kunnen afleiden, door slechts in de formulen van n°. 86, de zijden en hoeken door hunne supplementen te vervangen, waardoor de cosinussen, tangenten en cotangenten negatief worden, en vervolgens de zijden in de hoeken, en wederkeerig, te veranderen. Zij dus ABC een rechtzijdige driehoek, waarin de zijde $AB = c = 90°$, $AC = b$ en $BC = a$, dan bekomt men terstond de navolgende zes verschillende betrekkingen, op zoodanigen driehoek toepasselijk.

$$\text{I.}\quad \cos C = -\cos A \cos B$$
$$\text{II.}\quad \cos C = -\cot a \cot b$$
$$\text{III.}\quad \sin A = \sin C \sin a$$
$$\text{IV.}\quad tg\, A = \sin B\, tg\, a$$
$$\text{V.}\quad tg\, B = -tg\, C \cos a$$
$$\text{VI.}\quad \cos a = \cos A \sin b,$$

waaruit gelijksoortige gevolgtrekkingen kunnen afgeleid worden, als voor de rechthoekige driehoeken opgegeven zijn.

## § 16.

### *Herleiding der grondformulen.*

93. Het zal niet ondienstig zijn aan te toonen, hoe de algemeene grondformulen, uit die voor de rechthoekige kunnen worden afgeleid, even als in § 14 de laatsten uit de eersten zijn gevonden; en daar de formulen voor de rechthoekige driehoeken ook op zich zelven aan de figuur zijn ontleend, verkrijgen wij op die wijze nog eene zelfstandige afleiding voor de algemeene formulen.

Wanneer men door de ribbe MC van den drievlakkigen hoek M (fig. 32), een vlak denkt, loodrecht op het grondvlak AMB staande, en het oppervlak des bols snijdende volgens den boog CD (fig. 40), dan zal de driehoek ABC hierdoor in twee driehoeken ADC, BDC, als rechthoekig in D zijnde, verdeeld worden. CD is alsdan een loodrechte boog, vallende op de zijde AB; en aangezien er op de beide overige zijden AC, BC, eveneens soortgelijke bogen uit de overstaande hoekpunten kunnen worden neêrgelaten, zoo zal elke bolvormige driehoek, evenals

een vlakke driehoek, op drie onderscheidene wijzen, in twee rechthoekige driehoeken kunnen verdeeld worden.

Volgens de aanwijzing onzer figuur valt de loodrechte boog CD binnen den driehoek. Dit nu zal altijd moeten plaats vinden, indien de hoeken A en B beide scherp of beide stomp zijn, en wel uithoofde de rechthoekszijde CD gelijksoortig met elk dezer hoeken behoort te zijn. Wanneer echter die hoeken ongelijksoortig zijn, gelijk in fig. 41, alwaar A scherp en B stomp ondersteld is, dan zal het vlak van den loodrechten boog blijkbaar buiten of achter den driehoek liggen, en het verlengde der basis AB in twee punten D en D′ op 180° afstand van elkander snijden. In dat geval bestaan er alzoo twee loodrechte bogen, waarvan de kortste CD achter den stompen hoek B, en de langste achter den scherpen hoek A zal gelegen zijn. Immers, in den rechthoekigen driehoek BCD, is $B < 90°$, dus $CD < 90°$ en $CD' > 90°$. Bepaalt men zich echter tot den kleinsten loodrechten boog, zoo mag men tot regel aannemen, dat bij ongelijksoortige hoeken aan de basis, de loodrechte boog steeds achter den stompen hoek valt.

Voegen wij hierbij nog de opmerking, dat ook in het geval van gelijksoortigheid der hoeken A en B, de loodrechte boog CD (fig. 40) tot op den cirkel waartoe de boog AB behoort, kan verlengd worden, zoodat er insgelijks twee loodrechte bogen uit C kunnen worden neêrgelaten, doch het is duidelijk, dat die tweede boog alsdan tot een driehoek behoort, hebbende eene zijner zijden $> 180°$, en alzoo buiten beschouwing blijft.

Men noeme weder de zijden, staande over de hoeken A, B, C, respectivelijk $a$, $b$, $c$; de deelen, waarin de hoek C door den loodrechten boog verdeeld wordt, P, Q; de overstaande segmenten van AB, $p$, $q$; en eindelijk den gemelden boog $\varphi$. Volgens form. (5), heeft men in de beide rechthoekige driehoeken ACD, BCD

$$\sin\varphi = \sin b \sin A. \qquad \sin\varphi = \sin a \sin B.$$

Derhalve $$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
waardoor de sinus-formule terug is gevonden.

Verder is volgens formule (5) in dezelfde rechthoekige driehoeken

$$\cos\varphi = \frac{\cos b}{\cos p} = \frac{\cos a}{\cos q},$$

dus $$\cos a = \frac{\cos b \cos q}{\cos p} = \frac{\cos b \cos(c - p)}{\cos p},$$

dat is, na ontwikkeling van $\cos(c - p)$,

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos b \sin c \tang p,$$

Nu is in $\triangle$ ACD

$$tang\, p = tang\, b\, \cos A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

derhalve $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad . \quad . \quad . \quad (1)$

zijnde de hoofdformule.

Voorts volgt uit dezelfde driehoeken door toepassing der formulen (7):

$$tang\, \varphi = tang\, A \sin p = tang\, B \sin q\,,$$

dus $tang\, A \cot B = \dfrac{\sin q}{\sin p} = \dfrac{\sin (c-p)}{\sin p} = \sin c \cot p - \cos c,$

dat is, volgens ($a$)

$$tang\, A \cot B = \frac{\sin c \cot b}{\cos A} - \cos c$$

of $\cot b \sin c = \sin A \cot B + \cos c \cos A \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

zijnde eene der cotangenten-formulen.

Eindelijk is nog volgens (3)

$$\cos \varphi = \frac{\cos A}{\sin P} = \frac{\cos B}{\sin Q},$$

dus $\cos A = \dfrac{\sin P}{\sin Q} \cos B = \dfrac{\sin (C-Q)}{\sin Q} \cos B$

$$= - \cos B \cos C + \cos B \sin C \cot Q.$$

Maar in $\triangle$ DCB, $\cot Q = \cos a\, tang\, B$ zijnde, wordt

$$\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\,; \quad . \quad . \quad (4)$$

zoodat nu, na behoorlijke verwisseling van letters, alle grondformulen terug zijn gevonden.

94. De formule (1) kan dienen om een hoek uit te drukken in de drie zijden.

Door oplossing van $\cos A$ volgt namelijk:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

doch het is duidelijk, dat deze formule niet geschikt is voor de berekening met logarithmen en daarom hiertoe behoort herleid te worden. Dit geschiedt op de volgende wijze.

Uit (11) volgt

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{-\cos (b+c) + \cos a}{\sin b \sin c};$$

(1)

of, volgens de formule

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),$$

daarbij gebruik makende van de formulen (31) § 3,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \ \sin c},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b \ \sin c}.$$

Stellende ter bekorting

$$a+b+c=2s,$$

derhalve $\qquad a+b-c=2(s-c)$ enz.,

wordt $\qquad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \ \sin c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \ \sin c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Door deeling en vermenigvuldiging volgt hieruit

$$\tang\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \ \sin(s-a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \ \sin c}\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} \quad . \ (15)$$

door verwisseling van letters verkrijgt men overeenkomstige uitdrukkingen voor de hoeken B en C.

Treffend is de gelijkvormigheid der formulen (12) — (15) met die, welke voor de berekening der hoeken uit de zijden eens vlakken driehoeks in § 8 zijn gevonden.

Ter bepaling van eene der zijden $a$ uit drie hoeken, heeft men volgens (4) de formule

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

welke vatbaar is om op dezelfde wijze als (11) voor de logarithmische berekening geschikt gemaakt te worden, hetgeen wij den lezer als oefening overlaten. Zulks kan echter ook even goed geschieden, door de formulen (12) — (15) onmiddellijk op den pooldriehoek toe te passen. In dat geval zal $\frac{1}{2}$ A in $90° - \frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}(a+b+c)$ in $270° - \frac{1}{2}(A+B+C)$
$\frac{1}{2}(a+b-c)$ in $90° - \frac{1}{2}(A+B-C)$ enz.

overgaan. Stellende nu

$$A+B+C=2S,$$

dan vindt men

$$\left.\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}} \\ \sin \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}} \\ \tan \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos (S-B) \cos (S-C)}{\cos S \cos (S-A)}} \\ \sin a &= \frac{2}{\sin B \sin C} \sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)} \end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

overeenkomstige formulen kunnen voor de zijden $b$ en $c$ door verwisseling van letters gevonden worden.

Hoewel de vormen onder het wortelteeken in de drie laatste formulen met het negatieve teeken zijn aangedaan, zijn de wortelgrootheden toch bestaanbaar. Want $\cos S$ is altijd negatief, omdat $2S = A + B + C > 2R$, derhalve $S > R$ is; evenzoo zijn $\cos (S-A)$, $\cos (S-B)$, $\cos (S-C)$ steeds positief, omdat

$$2(S-A) = B + C - A < 2R$$

derhalve $$S - A < R,$$

hetgeen evenzoo met de andere grootheden het geval is.

95. Uit de formulen, die de hoeken in de zijden uitdrukken, kunnen nog andere merkwaardige betrekkingen afgeleid worden.

Volgens (12) en (13) is:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}}.$$

Hieruit volgt:

$$\sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin (s-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin (s-b)}{\sin c} \cos \tfrac{1}{2} C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin (s-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin (s-a)}{\sin c} \cos \tfrac{1}{2} C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin s}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin s}{\sin c} \sin \tfrac{1}{2} C,$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin (s-c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin (s-c)}{\sin c} \sin \tfrac{1}{2} C.$$

(¹) Deze zijn o.a. ook door Mollweide bewezen.

Door behoorlijke optelling en aftrekking ontstaat hieruit

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin c}\cos \tfrac{1}{2}C =$$

$$= \frac{2\sin\left\{s-\tfrac{1}{2}(a+b)\right\}\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{2\sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c}\cos \tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin(s-b)-\sin(s-a)}{\sin c}\cos \tfrac{1}{2}C =$$

$$\frac{2\cos\left\{s-\tfrac{1}{2}(a+b)\right\}\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{2\sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c}\cos \tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\sin \tfrac{1}{2}C =$$

$$= \frac{2\cos(s-\tfrac{1}{2}c)\cos \tfrac{1}{2}c}{2\sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c}\sin \tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin s+\sin(s-c)}{\sin c}\sin \tfrac{1}{2}C =$$

$$= \frac{2\sin(s-\tfrac{1}{2}c)\sin \tfrac{1}{2}c}{2\sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c}\sin \tfrac{1}{2}C;$$

of, omdat $s-\tfrac{1}{2}(a+b)=\tfrac{1}{2}c$, $s-\tfrac{1}{2}c=\tfrac{1}{2}(a+b)$,

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2}c}\cos \tfrac{1}{2}C \quad , \quad . \; . \quad (18)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2}c}\cos \tfrac{1}{2}C, \quad . \; . \; . \quad (19)$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos \tfrac{1}{2}c}\sin \tfrac{1}{2}C, \quad . \; . \; . \quad (20)$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin \tfrac{1}{2}c}\sin \tfrac{1}{2}C. \quad . \; . \; . \quad (21)$$

Deze vier formulen, welke even zoo vele betrekkingen bevatten tusschen de zes elementen des driehoeks, zijn in de bolvormige driehoeksmeting bekend onder den naam van formulen van GAUSS, ofschoon zij, met meer recht, die van DELAMBRE behoorden genaamd te worden *).

---

*) GAUSS heeft die formulen voor het eerst doch zonder betoog bekend gemaakt in zijn beroemd werk: *Theoria motus corporum coel.* 1809. Zij waren echter reeds door DELAMBRE medegedeeld in de *Connaiss. des tems* over 1808, en zijn vervolgens door hem op eene vrij omslachtige wijze betoogd in zijn *Traité d'astronomie*, Tom. I, pag. 160.

**96.** Uit de formulen (18) — (21) kunnen door onderlinge deeling niet minder merkwaardige betrekkingen afgeleid worden.

Deelt men namelijk (18) door (20) en (19) door (21), dan volgt:

$$\left.\begin{aligned} \textit{tang}\ \tfrac{1}{2}\,(A+B) &= \frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}\,C \\ \textit{tang}\ \tfrac{1}{2}\,(A-B) &= \frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}\,C \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (22)$$

Deelt men daarentegen (21) door (20) en (19) door (18), dan verkrijgt men na eene kleine omzetting

$$\left.\begin{aligned} \textit{tang}\ \tfrac{1}{2}\,(a+b) &= \frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(A+B)}\,\textit{tang}\ \tfrac{1}{2}\,c \\ \textit{tang}\ \tfrac{1}{2}\,(a-b) &= \frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(A-B)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(A+B)}\,\textit{tang}\ \tfrac{1}{2}\,c \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (23)$$

De formulen (22) en (23) zijn algemeen bekend onder den naam van *Neperiaansche analogiën* en spelen eene belangrijke rol bij de oplossing van vraagstukken uit de bolvormige driehoeksmeting, zooals later zal blijken.

Reeds de naam duidt aan, dat de Neperiaansche analogiën van ouder dagteekening zijn dan de formulen van Gauss, zoodat zij onafhankelijk van deze moeten gevonden zijn. Deze afleiding kan op de volgende wijze geschieden.

Volgens formule (*b*) n°: 83 is

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A,$$

evenzoo $\cos b \sin a = \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B.$

Door optelling volgt hieruit

$$(\sin a \cos b + \cos a \sin b)\,(1 - \cos C) = \sin c\,(\cos A + \cos B)$$

of $$\sin c\,(\cos A + \cos B) = \sin (a+b)\,(1 - \cos C) \quad . \ . \quad (c)$$

Verder volgt uit de sinusformule

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$
$$\sin c \sin B = \sin b \sin C$$

derhalve

$$\sin c\,(\sin A \pm \sin B) = (\sin a \pm \sin b) \sin C \quad . \ . \quad (d)$$

Deelt men nu (*d*) door (*c*), achtereenvolgens het bovenste en onderste teeken nemende, dan wordt:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin (a+b)} \cdot \frac{\sin c}{1 - \cos C},$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin (a+b)} \cdot \frac{\sin C}{1 - \cos C},$$

of, volgens meermalen toegepaste goniometrische formulen:

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{2\sin^2\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}(r+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{2\sin^2\frac{1}{2}C},$$

derhalve na vereenvoudiging

$$\tang\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,$$

$$\tang\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,$$

waardoor de beide eerste Neperiaansche analogiën terug zijn gevonden. Het zal den lezer niet moeilijk vallen de beide anderen op overeenkomstige wijze af te leiden, terwijl zij ook ontstaan wanneer men op de bovenstaande den pooldriehoek toepast.

97. Ook de sinusformule kan nog eene herleiding ondergaan. Uit de evenredigheid

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$$

volgt namelijk

$$\sin a - \sin b : \sin a + \sin b = \sin A - \sin B : \sin A + \sin B,$$

of volgens bekende goniometrische betrekkingen (zie form. (57) § 3),

$$\tang\frac{1}{2}(a-b):\tang\frac{1}{2}(a+b)=\tang\frac{1}{2}(A-B):\tang\frac{1}{2}(A+B)\quad.\quad(24)$$

Deze formule heeft groote overeenkomst met de formule (8) § 8 uit de vlakke driehoeksmeting, doch is niet van dezelfde uitgestrekte toepassing, omdat hier niet als daar uit de som van twee der hoeken de derde bekend wordt.

98. Ten slotte deelen wij hier nog eenige fraaie formulen mede voor de waarde van den modulus M.

Vooreerst heeft men uit de vergelijking (*a*) § 13:

$$M=\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b},$$

$$M=\frac{\sin A+\sin B}{\sin a+\sin b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$M=\frac{\sin A-\sin B}{\sin a-\sin b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Verder bekomt men met behulp der form. (15)

$$M=\frac{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a\sin b\sin c}=\frac{P}{\sin a\sin b\sin c}.$$

Evenzoo geven de form. (17)

$$M = \frac{\sin A \sin B \sin C}{2\sqrt{\{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-B)\}}} = \frac{\sin A \sin B \sin C}{P'},$$

waarin $P = 2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$,

$P' = 2\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}$.

Hieruit volgt $M^2 = \frac{P}{P'} \times M^2$ of $M = \frac{P'}{P}$.

Uit de formulen (18) en (20)

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \sin \tfrac{1}{2} C.$$

vindt men gemakkelijk

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin C} = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}$$

$$\frac{\sin(A+B) + \sin C}{\sin C} = \frac{2 \sin S \cos(S-C)}{\sin C} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2\cos^2 \frac{1}{2} c}.$$

Verder volgt uit (18) en (20) door de eerste met $\sin \frac{1}{2} C$, de tweede met $\cos \frac{1}{2} C$ te vermenigvuldigen en het verschil der producten te nemen

$$\cos S = -\frac{P}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

en $\cos(S-C) = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}$,

gevende $\cos S \cos(S-C) = \frac{-P \sin C}{4 \cos^2 \frac{1}{2} c}$.

Deze vergelijking deelende in de hiervoor gevonden, namelijk

$$\sin S \cos(S-C) = \left(\frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos^2 \frac{1}{2} c}\right) \sin C$$

komt er $tg\, S = -\left(\frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{P}\right)$,

welke, met toepassing op elk der drie supplements-driehoeken, daarenboven geeft

$$tg(S-A) = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{P}$$

$$tg(S-B) = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{P}$$

$$tg(S-C) = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{P},$$

waaruit tevens door optelling en aftrekking af te leiden is:

$$tg\,(S-A)+tg\,(S-B)+tg\,(S-C)-tg\,S=\frac{4}{P}.$$

De vijf laatste vergelijkingen op den pooldriehoek van toepassing gemaakt, geven nog de volgende:

$$cot\,s=\frac{cos\,A+cos\,B+cos\,C-1}{P'},$$

$$cot\,(s-a)=\frac{1+cos\,B+cos\,C-cos\,A}{P'},$$

$$cot\,(s-b)=\frac{1+cos\,A+cos\,C-cos\,B}{P'},$$

$$cot\,(s-c)=\frac{1+cos\,A+cos\,B-cos\,C}{P'},$$

$$cot\,(s-a)+cot\,(s-b)+cot\,(s-c)-cot\,s=\frac{4}{P'}.$$

Derhalve

$$M=\frac{tg\,(S-A)+tg\,(S-B)+tg\,(S-C)-tg\,S}{cot\,(s-a)+cot\,(s-b)+cot\,(s-c)-cot\,s}.$$

Men kan in de aangehaalde formulen voor $cos\,S$, $cos\,(S-C)$ enz. nog de volgende veranderingen brengen, waaruit nieuwe uitdrukkingen voor den modulus M zullen ontstaan.

Schrijvende namelijk in elke dezer formulen, voor P zijne waarde $M\,sin\,a\,sin\,b\,sin\,c$, dan gaan zij over in

$$\begin{aligned}
cos\,S &= -2\,M\,sin\,\tfrac{1}{2}\,a\,sin\,\tfrac{1}{2}\,b\,sin\,\tfrac{1}{2}\,c\\
cos\,(S-A) &= 2\,M\,sin\,\tfrac{1}{2}\,a\,cos\,\tfrac{1}{2}\,b\,cos\,\tfrac{1}{2}\,c\\
cos\,(S-B) &= 2\,M\,sin\,\tfrac{1}{2}\,b\,cos\,\tfrac{1}{2}\,a\,cos\,\tfrac{1}{2}\,c\\
cos\,(S-B) &= 2\,M\,sin\,\tfrac{1}{2}\,c\,cos\,\tfrac{1}{2}\,a\,cos\,\tfrac{1}{2}\,b,
\end{aligned}$$

welke formulen, bij toepassing op den pooldriehoek, als wanneer M in $\frac{1}{M}$ overgaat, het navolgende stelsel opleveren

$$sin\,s=\frac{2}{M}\,cos\,\tfrac{1}{2}\,A\,cos\,\tfrac{1}{2}\,B\,cos\,\tfrac{1}{2}\,C,$$

$$sin\,(s-a)=\frac{2}{M}\,cos\,\tfrac{1}{2}\,A\,sin\,\tfrac{1}{2}\,B\,sin\,\tfrac{1}{2}\,C,$$

$$sin\,(s-b)=\frac{2}{M}\,cos\,\tfrac{1}{2}\,B\,sin\,\tfrac{1}{2}\,A\,sin\,\tfrac{1}{2}\,C,$$

$$sin\,(s-c)=\frac{2}{M}\,cos\,\tfrac{1}{2}\,C\,sin\,\tfrac{1}{2}\,A\,sin\,\tfrac{1}{2}\,B,$$

De som der vergelijkingen van het eerste stelsel geeft, na eenige herleiding:

$$2M \sin s = \cos S + \cos (S - A) + \cos (S - B) + \cos (S - C),$$

of $$M = \frac{\cos S + \cos (S - A) + \cos (S - B) + \cos (S - C)}{2 \sin s},$$

uit welke formule, na haar op elk der supplements-driehoeken toegepast te hebben, nog de drie navolgende uitdrukkingen voor M ontstaan

$$M = \frac{\cos (S - B) + \cos (S - C) - \cos (S - A) - \cos S}{2 \sin (s - a)},$$

$$M = \frac{\cos (S - A) + \cos (S - C) - \cos (S - B) - \cos S}{2 \sin (s - b)},$$

$$M = \frac{\cos (S - A) + \cos (S - B) - \cos (S - C) - \cos S}{2 \sin (s - c)},$$

waaruit weder met behulp van den pooldriehoek de navolgende verkregen worden:

$$\cos S = \frac{M}{2} \left\{ \sin s - \sin (s-a) - \sin (s-b) - \sin (s-c) \right\},$$

$$\cos (S - A) = \frac{M}{2} \left\{ - \sin (s-a) + \sin (s-b) + \sin (s-c) + \sin s \right\}.$$

$$\cos (S - B) = \frac{M}{2} \left\{ - \sin (s-b) + \sin (s-a) + \sin (s-c) + \sin s \right\},$$

$$\cos (S - C) = \frac{M}{2} \left\{ - \sin (s-c) + \sin (s-a) + \sin (s-b) + \sin s \right\},$$

Deze laatste vergelijkingen in het vierkant brengende, zoo bekomt men, na eene lichte herleiding,

$$M^2 = \frac{\cos^2 S + \cos^2 (S-A) + \cos^2 (S-B) + \cos^2 (S-C)}{\sin^2 s + \sin^2 (s-a) + \sin^2 (s-b) + \sin^2 (s-c)}.$$

Behalve de voorgaande bestaan er nog verscheidene andere merkwaardige betrekkingen tusschen de zes elementen eens bolvormigen driehoeks, waaromtrent men met vrucht kan raadplegen eene belangrijke bijdrage van den heer Bretschneider, voorkomende in het XIIde deel van het *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

## § 17.

### *Oplossing der scheefhoekige driehoeken.*

99. Even als bij de rechthoekige driehoeken heeft men voor de scheefhoekige zes verschillende gevallen van oplossing. De gegevens kunnen namelijk zijn:

1e. Drie zijden.
2e. Drie hoeken.
3e. Twee zijden en de tusschen gelegen hoek.
4e. Twee hoeken en de tusschen gelegen zijde.
5e. Twee zijden en een hoek over eene van deze zijden.
6e. Twee hoeken en eene zijde over een dezer hoeken.

Achtereenvolgens zullen wij deze gevallen behandelen, bij elk naar gewoonte de voorwaarden van bestaanbaarheid en een voorbeeld in getallen voegen. Eigenlijk zou men slechts drie gevallen, het 1ste 3de, en 5de, behoeven op te lossen, omdat de overige door den pooldriehoek onmiddellijk tot een van dezen kunnen herleid worden. Doch het is beter en nauwkeuriger om elk geval op zich zelf te beschouwen.

Bij elk geval zullen wij als eerste oplossing de formulen zoeken en behandelen, die tusschen elk der onbekende elementen en de gegevens bestaan, en deze formulen zijn altijd te vinden, omdat alle combinatiën van vier elementen in de vijftien grondformulen voorkomen. Als verdere oplossingen zullen wij nagaan, of er korter of eenvoudiger wegen bestaan om de waarde der onbekende elementen op te sporen.

### Iste GEVAL.

*Gegeven zijnde de drie zijden: $a$, $b$, $c$, de drie onbekende hoeken te vinden.*

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarden, dat hunne som kleiner is dan 360° en de som van elke twee grooter dan de derde.

1e *Oplossing.* De grondformulen, die de betrekking tusschen elk der onbekenden en de gegevens uitdrukken, zijn het stelsel (1), § 13, namelijk

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Hoe hieruit de hoek opgelost en de formule herleid kan worden, is reeds in de vorige paragraaf aangetoond. Daar hebben wij de volgende formulen, die de hoeken in de zijden uitdrukken, verkregen:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \sin \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}}, \\ \sin \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \\ \cos \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}} \\ \cos \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tang \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}} \\ \tang \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-b)}} \\ \tang \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin s \sin (s-c)}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)} \\ \sin B &= \frac{2}{\sin a \sin c} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)} \\ \sin C &= \frac{2}{\sin a \sin b} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)} \end{aligned}\right\}$$

Aangaande deze vier stelsels formulen, waarvan elk voor de berekening der hoeken kan dienen, gelden dezelfde opmerkingen als bij de formulen, die in het 1e Geval der rechtlijnige scheefhoekige driehoeksmeting voor de berekening der hoeken zijn gevonden, zoodat ook hier het derde stelsel de voorkeur verdient, wanneer de drie hoeken gevraagd worden, doch eene formule der beide eerste stelsels, wanneer de kennis van slechts één hoek noodig is. Het vierde stelsel is minder geschikt, omdat het kwadrant der hoeken onbepaald blijft; toch hebben deze formulen haar nut, zooals in de toepassingen zal blijken.

Men zou ook hier een der hoeken door een der bovenstaande formulen kunnen berekenen, en vervolgens de beide anderen door de sinusformule, doch dit is niet te verkiezen, omdat de bewerking niet korter is en niet elk der onbekenden onmiddellijk uit de gegevens berekend wordt.

2e *Oplossing.* Uit de gegevens kunnen eerst de stukken $p$ en $q$ (fig. 40) berekend worden, waarin de basis door de loodlijn uit den top wordt verdeeld. Men heeft toch (n°. 93)

$$\cos \varphi = \frac{\cos b}{\cos p} = \frac{\cos a}{\cos q},$$

derhalve
$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos q - \cos p}{\cos q + \cos p},$$

of, volgens eene bekende goniometrische transformatie-formule ((56) § 3):

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(q-p) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p+q)$$

gevende, omdat $p + q = c$,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(q-p) = \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c}$$

$$p = \frac{c}{2} + \frac{p-q}{2}, \quad q = \frac{c}{2} - \frac{p-q}{2},$$

waardoor $p$ en $q$ kunnen berekend worden. Hieruit vindt men vervolgens de hoeken A en B door de formulen

$$\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} b \cos A, \quad \operatorname{tang} q = \operatorname{tang} a \cos B,$$

dus
$$\cos A = \frac{\operatorname{tang} p}{\operatorname{tang} b}, \quad \cos B = \frac{\operatorname{tang} q}{\operatorname{tang} a},$$

eindelijk wordt C gevonden uit

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A = \frac{\sin c}{\sin b} \sin B.$$

Deze formule geeft twee waarden voor C, waartusschen de keus bepaald wordt door de opmerking, dat over een grooter zijde een grooter hoek moet gelegen zijn.

*Voorbeeld.* Zij $a = 76° 35' 36''$, $b = 50° 10' 30''$ en $c = 40° 0' 10''$.

*Volgens de* 1e *oplossing.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a =$ | 76° | 95′ | 36″ | |
| $b =$ | 50 | 10 | 30 | |
| $c =$ | 40 | 0 | 10 | |
| $2s =$ | 166 | 46 | 16 | |
| $s =$ | 83 | 23 | 8 | $\log \sin s = 9{,}9970996$ |
| $s - a =$ | 6 | 47 | 32 | $\log \sin (s-a) = 9{,}0728716$ |
| $s - b =$ | 33 | 12 | 38 | $\log \sin (s-b) = 9{,}7385565$ |
| $s - b =$ | 43 | 22 | 58 | $\log \sin (s-c) = 9{,}8368740$ |

$$\begin{array}{rlrl}
\log\sin(s-b) = & 9{,}7385565 & \log\sin(s-a) = & 9{,}0728716 \\
\log\sin(s-c) = & 9{,}8368740 & \log\sin(s-c) = & 9{,}8368740 \\
C\log\sin(s-a) = & 0{,}9271284 & C\log\sin(s-b) = & 9{,}2614435 \\
C\log\sin s = & 0.0029004 & C\log\sin s = & 0{,}0029004 \\
 & \overline{\quad\quad}\ opg. & & \overline{\quad\quad}\ opg. \\
 & 0{,}5054593 & & 9{,}1740895 \\
 & 2\overline{\quad\quad} & & 2\overline{\quad\quad} \\
\log tang \tfrac{1}{2}A = & 0{,}2527296 & \log tang \tfrac{1}{2}B = & 9{,}5870447 \\
\tfrac{1}{2}A = & 60^{\circ}\ 48'\ 9'',9 & \tfrac{1}{2}B = & 21^{\circ}\ 7'\ 36'',8 \\
A = & 121^{\circ}\ 36'\ 19'',8 & B = & 42^{\circ}\ 15'\ 13'',6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log\sin(s-a) = & 9{,}0728716 \\
\log\sin(s-b) = & 9{,}7385565 \\
C\log\sin(s-c) = & 0{,}1631260 \\
C\log\sin s = & 0{,}0029004 \\
 & \overline{\quad\quad}\ opg. \\
 & 8{,}9774545 \\
 & 2\overline{\quad\quad} \\
\log tang \tfrac{1}{2}C = & 9{,}4887272 \\
\tfrac{1}{2}C = & 17^{\circ}\ 7'\ 31'',4 \\
C = & 34^{\circ}\ 15'\ 2'',8
\end{array}$$

*Volgens de 2e oplossing.*

$$\begin{array}{rl}
a = & 76^{\circ}\ 35'\ 36'' \\
b = & 50\ \ 10\ \ 30 \\
\hline
a+b = & 126\ \ 46\ \ 6 \\
a-c = & 26\ \ 25\ \ 6 \\
c = & 40\ \ 0\ \ 10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rll}
\tfrac{1}{2}(a+b) = & 63^{\circ}\ 23'\ 3'' & l\,tg\ 0{,}3000683 \\
\tfrac{1}{2}(a-b) = & 13\ \ 12\ \ 33 & l\,tg\ 9{,}3705440 \\
\tfrac{1}{2}c = & 20\ \ 0\ \ 5 & l\,cot\ 0{,}4389014 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
l\,tg\,\tfrac{1}{2}(q-p) = & 0{,}1095137 \\
\tfrac{1}{2}(q-p) = & 52^{\circ}\ 8'\ 55'' \\
\tfrac{1}{2}c = & 20\ \ 0\ \ 5 \\
\hline
q = & +72\ \ 9\ \ 0 \\
p = & -32\ \ 8\ \ 50
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl}
l\,tg\,p = & 9{,}7983693- & l\,tg\,q = & 0{,}4921067 \\
l\,cot\,b = & 9{,}9211182 & l\,cot\,a = & 9{,}3772271 \\
\hline
l\cos A = & 9{,}7193875- & l\cos B = & 9{,}8693538 \\
A = & 121^{\circ}\ 36'\ 19'',8 & B = & 42^{\circ}\ 15'\ 13'',6
\end{array}$$

| | |
|---|---|
| $l\,sin\,A = 9{,}9302747$ | $l\,sin\,B = 9{,}8276379$ |
| $l\,sin\,c = 9{,}8080926$ | $l\,sin\,c = 9{,}8080926$ |
| $9{,}7383673$ | $9{,}6357305$ |
| $l\,sin\,a = 9{,}9880008$ | $l\,sin\,b = 9{,}8853636$ |
| $l\,sin\,C = 9{,}7503665$ | $l\,sin\,C = 9{,}7503669$ |
| $C = 34^0\,15'\,2'',8$ | $C = 34^0\,15'\,2'',9.$ |

De hoek C moet scherp genomen worden, dewijl $c < a$ zijnde, ook $C < A$ zal zijn.

Het negatieve teeken van het segment $p$ duidt aan, dat de loodrechte boog CD buiten den driehoek, achter den stompen hoek A valt.

## II^de GEVAL.

*Gegeven zijnde de drie hoeken* A, B, C, *te berekenen de drie zijden.*

De voorwaarden van bestaanbaarheid zijn, dat de som der hoeken grooter dan 180°, en de som van elke twee verminderd met den derden, kleiner dan 180° moet zijn.

1e *Oplossing.* De grondformulen voor dit geval zijn het stelsel (4), namelijk

$$\begin{aligned} cos\,A &= -\,cos\,B\,cos\,C + sin\,B\,sin\,C\,cos\,a\,, \\ cos\,B &= -\,cos\,A\,cos\,C + sin\,A\,sin\,C\,cos\,b\,, \\ cos\,C &= -\,cos\,A\,cos\,B + sin\,A\,sin\,B\,cos\,c\,, \end{aligned}$$

gevende volgens de herleidingen der vorige paragraaf:

$$\left.\begin{aligned} sin\,\tfrac{1}{2}\,a &= \sqrt{\frac{-cos\,S\,cos\,(S-A)}{sin\,B\,sin\,C}} \\ sin\,\tfrac{1}{2}\,b &= \sqrt{\frac{-cos\,S\,cos\,(S-B)}{sin\,A\,sin\,C}} \\ sin\,\tfrac{1}{2}\,c &= \sqrt{\frac{-cos\,S\,cos\,(S-C)}{sin\,A\,sin\,B}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} cos\,\tfrac{1}{2}\,a &= \sqrt{\frac{cos\,(S-B)\,cos\,(S-C)}{sin\,B\,sin\,C}} \\ cos\,\tfrac{1}{2}\,b &= \sqrt{\frac{cos\,(S-A)\,cos\,(S-C)}{sin\,A\,sin\,C}} \\ cos\,\tfrac{1}{2}\,c &= \sqrt{\frac{cos\,(S-A)\,cos\,(S-B)}{sin\,A\,sin\,B}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} tang\,\tfrac{1}{2}\,a &= \sqrt{\frac{-\,cos\,S\,cos\,(S-A)}{cos\,(S-B)\,cos\,(S-C)}} \\ tang\,\tfrac{1}{2}\,b &= \sqrt{\frac{-\,cos\,S\,cos\,(S-B)}{cos\,(S-A)\,cos\,(S-C)}} \\ tang\,\tfrac{1}{2}\,c &= \sqrt{\frac{-\,cos\,S\,cos\,(S-C)}{cos\,(S-A)\,cos\,(S-B)}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \frac{2}{\sin B \sin C}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)} \\ \sin b &= \frac{2}{\sin A \sin C}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)} \\ \sin c &= \frac{2}{\sin A \sin B}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)} \end{aligned}\right\}$$

Elk dezer stelsels kan dienen voor de berekeningen; de keus wordt als in het voorgaande geval bepaald. Ook kan men, een hoek gevonden hebbende, de beide anderen door de sinusformule berekenen.

2e *Oplossing.* Uit de gegevens kunnen eerst de deelen P en Q berekend worden, waarin de hoek C door de loodlijn op de basis wordt verdeeld. Men heeft toch

$$\cos \varphi = \frac{\cos A}{\sin P} = \frac{\cos B}{\sin Q},$$

gevende

$$\frac{\cos A - \cos B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin P - \sin Q}{\sin P + \sin Q}$$

of $$\tan \tfrac{1}{2}(A+B) \tan \tfrac{1}{2}(B-A) = \frac{\tan \tfrac{1}{2}(P-Q)}{\tan \tfrac{1}{2}(P+Q)},$$

dat is $$\tan \tfrac{1}{2}(P-Q) = \tan \tfrac{1}{2}(A+B) \tan \tfrac{1}{2}(B-A) \tan \tfrac{1}{2} C,$$

$$P = \frac{C}{2} + \frac{P-Q}{2}, \qquad Q = \frac{C}{2} - \frac{P-Q}{2},$$

zoodat nu P en Q bekend zijn.

Vervolgens heeft men voor de berekening der zijden:

$$\cos b = \cot A \cot P, \qquad \cos a = \cot B \cot Q,$$

$$\sin c = \frac{\sin C}{\sin A} \sin a = \frac{\sin C}{\sin B} \sin b,$$

omtrent welke laatste formule dezelfde opmerking geldt als bij de overeenkomstige in het 1e geval.

*Voorbeeld.* Zij A=66° 57′ 3″,6. B=97° 20′ 31″,6 en C=42° 30′ 55″.

*Berekening der zijde a volgens de 1e oplossing.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A = | 66° 57′ 3″,6 | | | |
| B = | 97 20 31 ,6 | | $l \sin B =$ | 9,9964245 |
| C = | 42 30 55 | | $l \sin C =$ | 9,8298097 |
| 2S = | 206 48 30 ,2 | | | 9,8262342 |
| | | | | 0,1737658 |

$S = 103^\circ\,24'\,15'',1 \qquad l\cos S = 9,3651492$

$S - A = 36\;\;27\;\;11,5 \quad l\cos(S-A) = 9,9054418$

$\overline{9,4443568}$

$2$

$l\sin \tfrac{1}{2}a = 9,7221784$

$\tfrac{1}{2}a = 31^\circ\,49'\,59'',\; a = 63^\circ\,39'\,58''.$

Men zal op gelijke wijze vinden

$$b = 75^\circ\,0'\,51'',3 \qquad c = 41^\circ\,9'\,46''.$$

*Berekening der drie zijden volgens de 2e oplossing.*

$$\begin{aligned}
B &= 97^\circ\,20'\,31'',6\\
A &= 66\;\;57\;\;3,6\\
B + A &= 164\;\;17\;\;35,2\\
B - A &= 30\;\;23\;\;28,0\\
C &= 42\;\;30\;\;55
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(B+A) &= 82^\circ\;8'\,47'',6 \quad l\,tg\;0,8603307\\
\tfrac{1}{2}(B-A) &= 15\;\;11\;\;44,0 \quad l\,tg\;9,4339469\\
\tfrac{1}{2}C &= 21\;\;15\;\;27,5 \quad l\,tg\;9,5899856\\
l\,tg\,\tfrac{1}{2}(P-Q) &= 9,8842632\\
\tfrac{1}{2}(P-Q) &= 37^\circ\,27'\,15'',5\\
\tfrac{1}{2}(P+Q) &= 21\;\;15\;\;27,5\\
P &= 58^\circ\,42'\,43''\\
Q &= -\,16^\circ\,11'\,48''
\end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| $l\cot A = 9,6288837$ | $l\cot B = 9,1100847-$ |
| $l\cot P = 9,7837064$ | $l\cot Q = 0,5369080-$ |
| $l\cos b = 9,4125901$ | $l\cos a = 9,6469927+$ |
| $b = 75^\circ\,0'\,51'',6$ | $a = 63^\circ\,39'\,58'',1$ |
| $l\sin a = 9,9524168$ | $l\sin b = 9,9849729$ |
| $l\sin C = 9,8298097$ | $l\sin C = 9,8298097$ |
| $9,7822265$ | $9,8147826$ |
| $l\sin A = 9,9638682$ | $l\sin B = 8,9964245$ |
| $l\sin c = 9,8183583$ | $l\sin c = 9,8183581$ |
| $c = 41^\circ\,9'\,46''$ | $c = 41^\circ\,9'\,45'',93$ |

De negatieve waarde van den hoek Q duidt hier insgelijks aan, dat de loodrechte boog buiten den driehoek achter den stompen hoek B valt, hetgeen reeds bovendien uit de gegevens was op te maken, uithoofde de hoeken A en B ongelijksoortig zijn.

*

## III$^{de}$ GEVAL.

*Gegeven zijnde twee zijden* $b$, $c$ *met den ingesloten hoek* A, *te berekenen de derde zijde* $a$ *en de beide overige hoeken* B *en* C.

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen.

1[e] *Oplossing.* De drie grondformulen, welke de betrekking tusschen elk der onbekende en de drie gegeven elementen uitdrukken, zijn

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$
$$\cot b \sin c = \sin A \cot B + \cos c \cos A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$
$$\cot c \sin b = \sin A \cot C + \cos b \cos A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Uit deze formulen kunnen de onbekenden worden opgelost en berekend, doch de uitkomsten zijn niet geschikt voor de logarithmische berekening. Ten dien einde worden zij op de volgende wijze omgezet.

Uit formule ($a$) volgt

$$\cos a = \cos b\,(\cos c + \operatorname{tang} b \sin c \cos A)$$

en stellende

$$\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} b \cos A,$$

wordt $\quad \cos a = \cos b\,(\cos c + \sin c \operatorname{tang} p) = \cos b \dfrac{\cos(c-p)}{\cos p}.$

De formulen ($b$) en ($c$) geven:

$$\cot B = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A} = \cot A\left(\frac{\cot b \sin c}{\cos A} - \cos c\right)$$

$$\cot C = \frac{\cot c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A} = \cot A\left(\frac{\cot c \sin b}{\cos A} - \cos b\right).$$

Stellende

$$\frac{\cot b}{\cos A} = \cot p, \qquad \frac{\cot c}{\cos A} = \cot p',$$

wordt

$$\cot B = \frac{\cot A \sin(c-p)}{\sin p},$$

$$\cot C = \frac{\cot A \sin(c-p')}{\sin p'}.$$

Voor de oplossing der drie onbekenden heeft men nu het volgende stelsel:

$$\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} b \cos A, \quad \operatorname{tang} p' = \operatorname{tang} c \cos A,$$

$$\cos a = \frac{\cos b \cos(c-p)}{\cos p} = \frac{\cos c \cos(b-p')}{\cos p'},$$

$\cos C \cos A' = \cot b' \sin C - \cot a' \sin A'$

$/ c$

$/ B$

$$tang\, B = \frac{tang\, A \sin p}{\sin (c - p)},$$

$$tang\, C = \frac{tang\, A \sin p'}{\sin (c - p')}.$$

Vergelijkt men deze uitkomsten met de figuur (fig. 40), dan blijkt, dat $p$ het stuk AD der zijde $c$, en $p'$ het stuk AF der zijde $b$ voorstelt. Door middel van de driehoeken ACD, BCD en ABF, CBF is het verder niet moeilijk de laatste formulen uit de figuur af te leiden.

2e *Oplossing.* De beide onbekende hoeken B en C kunnen berekend worden door de volgende formulen, tot de Neperiaansche analogiën behoorende, en die het voordeel hebben voor het gebruik der logarithmen geschikt te zijn.

$$tang\, \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(b - c)}{\sin \tfrac{1}{2}(b + c)} \cot \tfrac{1}{2} A,$$

$$tang\, \tfrac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(b - c)}{\cos \tfrac{1}{2}(b + c)} \cot \tfrac{1}{2} A.$$

Daarna vindt men de zijde $a$ door de sinusformule, of wel door de volgende betrekkingen, die uit de Neperiaansche analogiën en formulen van GAUSS (*n*°. 95) door omzetting verkregen worden.

$$tang\, \tfrac{1}{2} a = tang\, \tfrac{1}{2}(b + c) \frac{\cos \tfrac{1}{2}(B + C)}{\cos \tfrac{1}{2}(B - C)} = tang\, \tfrac{1}{2}(b - c) \frac{\sin \tfrac{1}{2}(B + C)}{\sin \tfrac{1}{2}(B - C)}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(b - c) \cos \tfrac{1}{2} A}{\sin \tfrac{1}{2}(B - C)} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(b + c) \sin \tfrac{1}{2} A}{\cos \tfrac{1}{2}(B - C)}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(b - c) \cos \tfrac{1}{2} A}{\sin \tfrac{1}{2}(B + C)} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(b + c) \sin \tfrac{1}{2} A}{\cos \tfrac{1}{2}(B + C)}.$$

De toepassing van deze formulen is niet lastiger dan van de sinusformule, omdat aan de voorgaande berekening verscheidene logarithmen onmiddellijk kunnen ontleend worden.

3e *Oplossing.* Trekt men uit A (fig. 40) een boog AE loodrecht op de overstaande zijden en noemt de deelen van den hoek A grenzende aan de zijden $b$, $c$, $Q'$ en $P'$, de loodlijn zelve $\varphi'$, dan is in de driehoeken ABE en ACE

$$tang\, \varphi' = tang\, c \cos Q' = tang\, b \cos P',$$

derhalve

$$\cos Q' : \cos P' = tang\, b : tang\, c,$$

$$\frac{\cos Q' - \cos P'}{\cos Q' + \cos P'} = \frac{tang\, b - tang\, c}{tang\, b + tang\, c},$$

of

$$tang\, \tfrac{1}{2}(P' - Q')\, tang\, \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin (b - c)}{\sin (b + c)}$$

gevende

$$tang\ \tfrac{1}{2}(P' - Q') = \frac{sin\ (b - c)}{sin\ (b + c)} cot\ \tfrac{1}{2} A\ ,$$

$$P' = \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2}(P' - Q')\ ,\quad Q' = \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2}(P' - Q')$$

en vervolgens ter berekening van B en C

$$cot\ B = cos\ c\ tang\ Q',\quad cot\ C = cos\ b\ tang\ P'.$$

De zijde $a$ kan nu als in de vorige oplossing of door de formule

$$sin\ a = \frac{sin\ b\ sin\ A}{sin\ B} = \frac{sin\ c\ sin\ A}{sin\ C}$$

berekend worden, in welk laatste geval men uit de vorige gegevens het scherp of stomp zijn der zijde $a$ moet beoordeelen.

Een der hoeken $P'$ en $Q'$ negatief wordende, zoo zal zulks aanduiden, dat de loodrechte boog buiten den driehoek valt, terwijl de soort der hoeken B, C alsdan zal moeten uitmaken, aan welke zijde de kortste loodrechte boog gelegen is.

De drie behandelde oplossingen, die nog met vele andere kunnen vermeerderd worden, samen nemende, blijkt, dat voor het berekenen van elk der onbekende elementen afzonderlijk, de $1_e$ oplossing de voorkeur verdient, omdat daarbij elk element onafhankelijk van de anderen wordt gevonden. Moeten echter de drie elementen berekend worden, dan is de $2_e$ oplossing de beste, als zijnde de kortste en nauwkeurigste voor de bewerking met getallen. De $3^e$ oplossing is in geen geval verkieselijk, doch heeft groote overeenkomst met de $2^e$ oplossingen der beide eerste gevallen.

*Voorbeeld.* Zij $A = 66^\circ\, 57'\, 3'',6.\ b = 75^\circ\, 0'\, 51'',3.\ c = 41^\circ\, 9'\, 46''.$

*Berekening der onbekende zijde a en der hoeken* B, C, *volgens de* $1^e$ *oplossing.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l\ tg\ b$ | $= 0,5723798$ | $l\ tg\ c$ | $= 9,9416540$ |
| $l\ cos\ A$ | $= 9,5927520$ | $l\ cos\ A$ | $= 9,5927520$ |
| $l\ tg\ p$ | $= 0,1651318$ | $l\ tg\ p'$ | $= 2,5344060$ |
| $p$ | $= 55^\circ\ 38'\ 21'',9$ | $p'$ | $= 18^\circ\ 53'\ 45'',7$ |
| $c$ | $= 41\quad 9\quad 46$ | $b$ | $= 75\quad 0\ 51\ ,3$ |
| $c - p$ | $= - 14^\circ\ 28'\ 35'',9$ | $b - p'$ | $= 56^\circ\ 7'\ 5'',6$ |

| | |
|---|---|
| $l\cos(c-p) = 9{,}9859874$ | $l\cos(b-p') = 9{,}7462302$ |
| $l\cos b = 9{,}4125929$ | $l\cos c = 9{,}8768042$ |
| $9{,}3985803$ | $9{,}6229344$ |
| $l\cos p = 9{,}7515864$ | $l\cos p' = 9{,}9759406$ |
| $l\cos a = 9{,}6469939$ | $l\cos a = 9{,}6469938$ |
| $a = 73^{\circ}\,39'\,57'',8$ | $a = 63^{\circ}\,39'\,57'',8$ |
| $l\,tg\,A = 0{,}3711962$ | $l\,tg\,A = 0{,}3711162$ |
| $l\sin p = 9{,}9167182$ | $l\sin p' = 9{,}5103464$ |
| $0{,}2978344$ | $9{,}8813626$ |
| $l\sin(c-p) = 2{,}3979144-$ | $l\sin(b-p') = 9{,}9191773$ |
| $l\,tg\,B = 0{,}8899200-$ | $l\,tg\,C = 9{,}9622853$ |
| $B = 97^{\circ}\,20'\,31'',3$ | $C = 32^{\circ}\,30'\,55'',0.$ |

*Volgens de 2e oplossing.*

$b = 75^{\circ}\ 0'\,51'',3$

$c = 41\ \ 9\ \ 46$

$b - c = 33\ \ 51\ \ 5,3$

$b + c = 116\ \ 10\ \ 37,3$

$\frac{1}{2}(b-c) = 16\ \ 55\ \ 32,6$

$\frac{1}{2}(b+c) = 58\ \ 5\ \ 18,6$

$A = 66\ \ 57\ \ 3,6$

$\frac{1}{2}A = 33\ \ 28\ \ 31,8$

| | |
|---|---|
| $l\sin\frac{1}{2}(b-c) = 9{,}4640895$ | $l\cos\frac{1}{2}(b-c) = 9{,}9807680$ |
| $l\sin\frac{1}{2}(b+c) = 3{,}9288390$ | $l\cos\frac{1}{2}(b+c) = 9{,}7231343$ |
| $9{,}5352505$ | $0{,}2576337$ |
| $l\cot\frac{1}{2}A = 0{,}1796207$ | $0{,}1796207$ |
| $l\,tg\left(\frac{B-C}{2}\right) = 9{,}7148712$ | $l\,tg\left(\frac{B+C}{2}\right) = 0{,}4372544$ |
| $\frac{1}{2}(B-C) = 27^{\circ}\,24'\,48'',0$ | $\frac{1}{2}(B+C) = 69^{\circ}\,55'\,43'',2$ |
| $\frac{1}{2}(B+C) = 69\ \ 55\ \ 43,2$ | |
| $B = 97\ \ 20\ \ 31,2$ | $C = 42^{\circ}\,30'\,55'',2$ |

$l\,tg\,\frac{1}{2}(b+c) = 0{,}2057046$

$l\cos\frac{1}{2}(B+C) = 9{,}5355343$

$9{,}7412389$

$l\cos\frac{1}{2}(B-C) = 9{,}9482703$

$l\,tg\,\frac{1}{2}a = 9{,}7929686$

$\frac{1}{2}a = 31^{\circ}\,49'\,58'',8$

$a = 63\ \ 39\ \ 57,6$

$$\begin{aligned} l\,sin\,\tfrac{1}{2}(b-c) &= 9{,}4640895 \\ l\,cos\,\tfrac{1}{2}\,A &= \underline{9{,}9212295} \\ & \quad 9{,}3853190 \\ l\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(B-C) &= \underline{9{,}6631413} \\ l\,sin\,\tfrac{1}{2}\,a &= 9{,}7221777 \\ \tfrac{1}{2}\,a &= 31^{\circ}\,49'58'',9 \\ a &= 63\;\;39\;\;57\;,8 \end{aligned}$$

De leerling oefene zich verder in het berekenen der onbekenden, volgens de formulen der laatste oplossing.

## IV^de GEVAL.

*Gegeven zijnde eene zijde a met de beide aanliggende hoeken* B *en* C, *te vinden den derden hoek* A, *benevens de beide onbekende zijden b, c.*

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen. Daar de oplossingen geheel overeenkomen met die van het voorgaande geval en alle formulen daaruit zelfs onmiddellijk kunnen afgeleid worden door de hoeken door de supplementen der overstaande zijden en omgekeerd te vervangen, zullen wij slechts het voornaamste meêdeelen en de bewerkingen aan den lezer overlaten.

1^e *Oplossing.* De drie grondformulen voor dit geval zijn

$$\begin{aligned} cos\,A &= -\,cos\,B\,cos\,C + sin\,B\,sin\,C\,cos\,a \\ cot\,b\,sin\,a &= sin\,C\,cot\,B + cos\,a\,cos\,C \\ cot\,c\,sin\,a &= sin\,B\,cot\,C + cos\,a\,cos\,B, \end{aligned}$$

gevende door oplossing der drie onbekenden en herleiding het volgende stelsel:

$$cot\,Q = tang\,B\,cos\,a \qquad cot\,Q' = tang\,C\,cos\,a$$

$$cos\,A = \frac{cos\,B\,cos\,(C-Q)}{sin\,Q} = \frac{cos\,C\,cos\,(B-Q')}{sin\,Q'}$$

$$tang\,b = tang\,a\,\frac{cos\,Q}{cos\,(C-Q)},$$

$$tang\,c = tang\,a\,\frac{cos\,Q'}{cos\,(B-Q')}.$$

Deze formulen kunnen weder uit de figuur afgeleid worden, wanneer men bedenkt, dat de ingevoerde hulphoek Q juist den hoek BCD en evenzoo Q' den hoek CBF voorstelt.

2^e *Oplossing.* Met behulp der Nep. analogiën, laten zich de onbekende zijden berekenen door de formulen

$$tg\,\tfrac{1}{2}(b-c)=\frac{sin\,\frac{1}{2}(B-C)}{sin\,\frac{1}{2}(B+C)}\,tg\,\tfrac{1}{2}a\,,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{cos\,\frac{1}{2}(B-C)}{cos\,\frac{1}{2}(B+C)}\,tg\,\tfrac{1}{2}a\,,$$

en vervolgens de hoek A door eene der formulen

$$tg\,\tfrac{1}{2}A=\frac{sin\,\frac{1}{2}(b-c)}{sin\,\frac{1}{2}(b+c)}\,cot\,\tfrac{1}{2}(B-C)\,,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}A=\frac{cos\,\frac{1}{2}(b-c)}{cos\,\frac{1}{2}(b+c)}\,cot\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,,$$

$$sin\,\tfrac{1}{2}A=\frac{cos\,\frac{1}{2}(B-C)}{sin\,\frac{1}{2}(b+c)}\,sin\,\tfrac{1}{2}a=\frac{cos\,\frac{1}{2}(A+C)}{cos\,\frac{1}{2}(b+c)}\,cos\,\tfrac{1}{2}a$$

$$cos\,\tfrac{1}{2}A=\frac{sin\,\frac{1}{2}(B-C)}{sin\,\frac{1}{2}(b-c)}\,sin\,\tfrac{1}{2}a=\frac{sin\,\frac{1}{2}(B+C)}{cos\,\frac{1}{2}(b-c)}\,cos\,\tfrac{1}{2}a\,,$$

waarin de beide eersten aan de Nep. analogiën, de beide laatsten aan de formulen van GAUSS ontleend zijn.

3e *Oplossing.* Men trekke den loodrechten boog AE, en stelle de segmenten CE, BE $=p', q'$, dan vindt men gemakkelijk

$$tg\,\tfrac{1}{2}(p'-q')=\frac{sin\,(B-C)}{sin\,(B+C)}\,tg\,\tfrac{1}{2}a$$

$$p'=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}(p'-q').\qquad q'=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}(p'-q').$$

De gegevens zullen hier onmiddellijk doen kennen, of de gemelde boog binnen of buiten den driehoek valt.

Vervolgens heeft men ter berekening van $b$ en $c$

$$tg\,b=\frac{tg\,p'}{cos\,C},\qquad tg\,c=\frac{tg\,q'}{cos\,B};$$

kunnende de derde hoek A, hetzij even als in de vorige oplossing, hetzij door de meer eenvoudige formule

$$sin\,A=sin\,a\,\frac{sin\,B}{sin\,b}=sin\,a\,\frac{sin\,C}{sin\,c}$$

worden berekend.

*Voorbeeld.* Zij $a=180^{\circ}\,19'\,12'',5$. $B=57^{\circ}\,13'\,12''$. $C=120^{\circ}\,0\,25''$ Men zal, door de toepassing van de hiervoor gegevene formulen vinden

$$A=87^{\circ}\,35'\,52''.\quad b=53^{\circ}\,1'\,11'',46.\quad c=124^{\circ}\,38'\,3''42.$$

## V$^{de}$ GEVAL.

*Gegeven zijnde twee zijden a, b met een der overliggende hoeken* A, *te vinden de beide overige hoeken* B, C, *benevens de onbekende zijde c.*

Dit en het volgende geval behooren tot de zoogenaamde *twijfelachtige* gevallen, dewijl de gegevens zoodanig kunnen zijn, dat zij gelijktijdig op twee verschillende driehoeken van toepassing worden, gelijk uit de navolgende beschouwingen zal blijken; zulk eene omstandigheid heeft men reeds in het VI$^{de}$ geval der rechthoekige driehoeken leeren kennen.

[ Zonder vooraf de onbekende elementen te berekenen, zal men uit de gegevens onmiddellijk kunnen opmaken, welke der beide omstandigheden hier zal plaats vinden.

Immers, onderstellende in de eerste plaats, dat $a > b$ en $a + b > 180^0$; dan zal ook $A > B$ en $A + B > 180^0$. Daar nu A niet scherp noch recht zijn kan, zoo stelle men $A = 90^0 + A'$ en $B = 90^0 + B'$, dan zal aan beide voorwaarden voldaan worden, indien $A' > B'$, doch zulks zal evenzeer het geval zijn, indien men B door zijn supplement $90^0 - B'$ vervangt.

Laat in de tweede plaats $a < b$ en $a + b < 180^0$ ondersteld worden, dan zal ook $A < B$ en $A + B < 180^0$. Daar nu A hier stomp noch recht kan zijn, zoo zij $A = 90^0 - A'$ en $B = 90^0 - B'$, dan moet $A' > B'$, en men ziet, even als hierboven, dat zoo wel de hoek B, als zijn supplement $90 + B'$ aan de beide laatste voorwaarden zullen voldoen. In dit en in het voorgaande geval kunnen er alzoo *twee* verschillende driehoeken met de gegevens bestaanbaar zijn. Geen driehoek zal echter mogelijk zijn, indien in het eerste geval $A < 90^0$, en in het tweede $A > 90^0$.

Heeft men echter $a > b$ en $< 180^0 - b$ of $a + b < 180^0$, dus ook $A > B$ en $A + B < 180^0$, dan kan A zoo wel scherp als stomp zijn. Stelt men nu $A = 90^0 - A'$ en $B = 90^0 - B'$, dan zal het supplement van B thans niet in aanmerking kunnen komen, uit hoofde hierdoor $A < B$ wordt. Stellende daarentegen $A = 90^0 + A'$ en $B = 90^0 - B'$, dan zal men het supplement van B insgelijks moeten verwerpen, vermits anders $A + B > 180^0$ wordt. Uit de hier aangenomen onderstelling volgt daarenboven $2b < 180^0$ en $2B < 180^0$, zoodat de zijde $b$ met den overstaanden hoek gelijksoortig is, en dus beide scherp moeten zijn.

Stelt men eindelijk nog $a < b$ en $a + b > 180^0$, dan zal het

(c) Wij zullen hieruit bepalen, wanneer er 2 driehoeken en wanneer er één slechts kan ontstaan.

Uit (b) blijkt, dat men 2 waarden voor B vindt, n.l. B en 180 − B.

Zij nu $a < b$

dan is $A < B$

Waren er 2 driehoeken dan kon bij den een aan b staan B, bij den ander aan b ... 180 − B

Als deze 2 er zijn, dan moet dus niet door ook [illegible]

kunnen $a < b$

zijn $A < 180 - B$ of $a < 180 - b$

of $A + B < 180$ of $b < 180 - a$

dus dan moet $a + b < 180°$

Is dus omgekeerd $a < b$ en $a < 180° - a$ (?)

dan is $A < B$ en $A + B < 180° - B > A$

en dan zijn er 2 driehoeken. [zie blz. 154]

---

Zij nu $a > b$

dan is $A > B$

Waren er 2 driehoeken, dan zou bij den een aan b staan de hoek B, bij den ander aan b de hoek 180 − B

Als deze 2 er zijn, dan moet toch weer, door ook kunnen

$a > b$

zijn ~~$A > 180 - B$~~ of $B > 180 - A$

of ~~$A + B > 180°$~~ $b > 180 - a$

dus dan moet ~~$a + b > 180°$~~

Is dus omgekeerd $a > b$, $b < a$ en $a + b > 180 - a$

dan is $A > B$, $B < A$ en $A + B > 180° - A$

en dan zijn er 2 driehoeken.

---

Zij nu $a < b$

dan is $A < B$

Waren er slechts één Δ dan kon het punt B′ links van A vallen en is die driehoek, die dan niet ontstaan kan over a staan de hoek 180 − A, aan b de hoek B; door $a < b$ is dan in dien Δ:

$180 - A < B$ of $B > 180 - A$

of ~~$A + B > 180$~~ dus $b > 180 - a$

dus ~~$a + b > 180$~~

Is dus omgekeerd $a < b$ en $a + b > 180° - a$,

dan is $A < B$ en $A + B > 180° - A$

is dan is er slechts 1 driehoek.

---

op gelijke wijze als hiervoor blijken, dat hier slechts ééne waarde van B aan eene der voorwaarden $A < B$ en $A + B > 180°$ zal kunnen voldoen, en men tevens zal hebben $b > 90°$ en $B > 90°$.

Op grond der voorgaande redeneeringen kan men thans den navolgenden regel vaststellen, ter beslissing in het twijfelachtige geval.

Is namelijk $A > 90°$, $a > b$ en $a + b > 180°$
of $A < 90°$, $a < b$ en $a + b < 180°$,
dan heeft de hoek B *twee* verschillende waarden, die met de gegevens bestaanbaar zijn.

Is echter $a > b$ en $a + b < 180°$,
of $a < b$ en $a + b > 180°$,
dan zal de hoek B slechts ééne waarde kunnen hebben, en altijd gelijksoortig zijn met de overstaande zijde $b$.

Men kan den voorgaanden regel nog eenvoudiger aldus voorstellen:

*Er zal slechts één driehoek mogelijk zijn, zoodra de zijde a tusschen de zijde b en haar supplement* $180° - b$ *gelegen is;* B *en b zullen alsdan gelijksoortig zijn. In het tegenovergestelde geval zullen er twee driehoeken kunnen bestaan, mits de hoek* A *met de zijde a gelijksoortig zij.*

1e *Oplossing.* De drie grondformulen, in dit geval te gebruiken, zijn:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad \ldots \quad (b)$$

$$\cot a \sin b = \sin C \cot A + \cos b \cos C \quad \ldots \quad (c)$$

Uit $(a)$ volgt

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \quad \ldots \ldots \quad (d)$$

en deze formule geeft twee supplementaire waarden voor B. Of zij beiden dan wel een van beiden moeten gebruikt worden, is vooraf volgens bovengenoemde regels uit de gegevens afgeleid. In alle gevallen wordt voor de bestaanbaarheid vereischt, dat

$$\sin b \sin A < \sin a,$$

hetgeen overeenkomt met de eigenschap, dat de loodlijn uit C neergelaten, kleiner of grooter dan de zijde $a$ moet zijn, naarmate zij beide scherp of stomp zijn.

Stellende $\sin b \sin A = \sin \varphi$, dan vindt men gemakkelijk uit $(d)$

$$tang\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{tang\,\tfrac{1}{2}(a-\varphi)}{tang\,\tfrac{1}{2}(a+\varphi)}},$$

welke formule ook twee waarden voor B oplevert en bijzonder dienstig zal zijn, ingeval die hoek weinig van 90° verschilt en alzoo door zijn sinus niet nauwkeurig kan bepaald worden.

Om uit de verg. ($b$) het onbekende element $c$ op te lossen, schrijve men

$$cos\,a = cos\,b\,(cos\,c + sin\,c\,tang\,b\,cos\,A)$$

en stelle

$$tang\,b\,cos\,A = tang\,p,$$

dan wordt

$$cos\,a = \frac{cos\,b\,cos\,(c-p)}{cos\,p},$$

of, nemende

$$c - p = q$$

$$cos\,a = \frac{cos\,b\,cos\,q}{cos\,p};$$

derhalve

$$cos\,q = \frac{cos\,a\,cos\,p}{cos\,b}$$

en

$$c = p \pm q.$$

Het dubbele teeken dient hier om aan te wijzen, dat uit $cos\,q$ zoowel de positieve als de negatieve waarde van $q$ moet genomen worden.

Op die wijze ontstaat de dubbele waarde van $c$, die in eene enkele overgaat wanneer $q > p$.

Om uit formule ($c$) de onbekende C op te lossen, ga men aldus te werk:

$$cot\,a = cot\,b\left(\frac{sin\,C\,cot\,A}{cos\,b} + cos\,C\right).$$

Zij

$$\frac{cot\,A}{cos\,b} = tang\,P,$$

dan wordt:

$$cot\,a = \frac{cot\,b\,cos\,(C-P)}{cos\,P};$$

of, stellende

$$C - P = Q,$$

$$cos\,Q = \frac{cos\,P\,tang\,b}{tang\,a}$$

$$C = P \pm Q;$$

aangaande het dubbele teeken van Q valt hetzelfde op te merken als bij $q$.

Zy nu $a > b$

dan is $A > B$

Want er slechts 1 driehoek, dan zou het punt B' links van A moeten vallen en is dus Δ die dan niet voldoen zou aan a, stond de hoek $180 - A$, over b de hoek B; daar is dan Δ : $a \not> a > b$ zoo is dan

$$180 - A > B$$

of

dus

$$~~A + B < 180~~ \quad B < 180 - A$$

$$~~a + b < 180~~ \quad b < 180 - a$$

Is dus aangetoond $a \not> b < a$ en $a + b < 180 - a$

dan is $A \not> B < A$ en $A + B < 180 - A$

en dan is er slechts 1 driehoek.

## Recapitulatie

$a < b$ $a + b < 180$ of $b > a$ en $b < 180 - a$ . . . 2 driehk.

$a > b$ $a + b > 180$ of $b < a$ en $b > 180 - a$ . . . 2 "

$a < b$ $a + b > 180$ of $b > a$ en $b > 180 - a$ . . . 1 "

$a > b$ $a + b < 180$ of $b < a$ en $b < 180 - a$ . . . 1 "

of als men hoven dit wil zeggen.

als de alleenstaande ~~zyde~~ zyde ~~over den onbekenden hoek~~ gelegen is tusschen de andere zyde en haar supplement dan zyn er 2 driehoeken; b.v. $a = 40°$ en $b = 70$ (70 ligt in tusschen 40 en 140)

als de zyde over den onbekenden hoek niet gelegen is tusschen de andere zyde of haar supplement, dan is er slechts 1 driehoek b.v. $a = 80°$ en $b = 140°$ (de b is dan tweemaal grooter ~~dat~~ dan a zelf als dan het supplement v. a).

Bewys v. blz 155.) Zy de rechte lyn in hare centre loodrecht op het vlak van den as hel behoorende cirkel, dan is het duidelyk dat de lyn OL een boog van 90° is.

Voordat zullen wy nu bewyzen:

$$a < b \text{ en } b < 180 - a$$

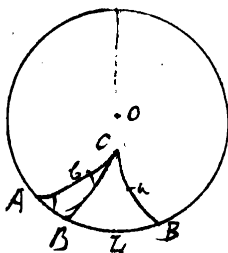
en we hullen nu laten zien, dat er 2 driehoeken mogelyk zijn.

Daar $a < b < 180 - a$

is zeker $a < 180 - a$

of $2a < 180$

of $a < 90°$

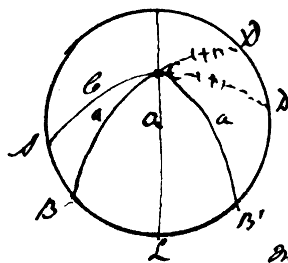



Neemt men nu op OL een punt C, en beschrijft men den boog a; het [illegible] de boog a [illegible] den te ... met by van OL afsnyden. Trekt men dan CA o.i. b

dit grooter onderscheid wordt dan a, dan moet het punt A verder van L liggen dan B van L ligt.

Het is echter alleen mogelijk om rechts of links van OL twee gelijke bogen a te hebben, als dan a < b, zal de tweede boog b.v. CB' zijn. We kunnen dus, dat er 2 driehoeken te construeren zijn n.l. ABC en AB'C.

2e geval (bij blz. 157)




Zij de rechte lijn een halve cirkel, loodrecht op het vlak van den volgeleidenden cirkel, dan is het duidelijk dat de boog OL een boog van 90° is. Voor dit geval is nu vereischt

$a > b > 180 - a$

en we kunnen nu laten zien, dat er 2 driehoeken mogelijk zijn. Want:

$a > b > 180 - a$

is zeker

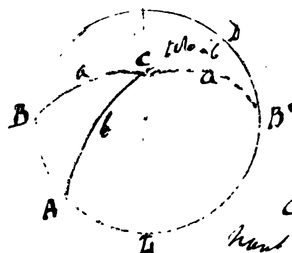
$a > 180 - a$

of

$a > 90°$

Neemt men nu op het verlengde van OL het punt C en beschrijft men dan boog a. Hoe grooter de boog a is, des te dichter komt hij bij OL. Nu is $b < a$, dus b.v. zal boog CA, de groote boog b zijn en dan valt boven CB. De Δ ABC bereikt nu de drie eischen, doch evenzeer de driehoek AB'C. Men kan echter vragen of de boog AB' niet grooter dan 180° was. Dit kan niet, want trekt men CD door, dan is $CD = 180 - b$; uit de voorwaarde $b > 180 - a$ volgt $a > 180 - b$ en daar alle bogen tusschen CD en CL grooter zijn dan boog CD d.i. $> 180 - b$ zal ergens tusschen L en D het punt B' gevonden moeten worden. En daar boog $AD = 180°$, zoo is AB' stellig $< 180°$.

3e geval.




Voor is dus $a < b$ en $a > 180 - b$

Uiteindelijk: $b > 180 - b$

of $b > 90°$

Zij CA nu = b dan moet omdat $a < b$, de boog CB tusschen CA vallen. De Δ CAB voldoet dus. Neemt men nu CB' = CB en verlengt men CA, dan moet B' tusschen D vallen. Want $a > 180 - b$. Doch dan is de Δ B'AC (zoo boog ongeveer) een zijde $> 180°$. En de Δ B'AC (zoo anders ongeveer) kan een sphaerische zijn

Voor de oplossing der drie onbekenden heeft men nu het volgende stelsel formulen

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

$$\tan p = \tan b \cos A, \qquad \cot P = \cos b \tan A,$$

$$\cos q = \frac{\cos a \cos p}{\cos b}, \qquad \cos Q = \frac{\tan b \cos P}{\tan a}$$

$$c = p \pm q, \qquad C = P \pm Q.$$

Deze formulen kan men ook onmiddellijk uit de figuur afleiden, wanneer men bedenkt (fig. 40), dat $p$ en $q$ juist de stukken voorstellen, waarin de zijde $c$ door de loodlijn uit het overstaande hoekpunt wordt verdeeld, en evenzoo P en Q de overeenkomstige deelen van den hoek C; dan heeft het dubbele teeken betrekking op de gevallen, dat de loodlijn CD binnen en buiten den driehoek valt.

2e *Oploseing.* De hoek B wordt eerst op dezelfde wijze berekend, namelijk door de formule:

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \quad . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

men vindt daarna de elementen $c$ en C door middel van de volgende aan de Nep. analogiën ontleende formulen:

$$\tan \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \tan \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \tan \tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\tan \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A+B).$$

Heeft men nu uit ($a$) twee waarden voor B gevonden, dan moet men ze achtereenvolgens in deze formulen overbrengen en verkrijgt hierdoor de overeenkomstige dubbele waarden voor $c$ en C.

De voor- en nadeelen van elk der beide oplossingen zullen den aandachtigen lezer ook zonder nadere omschrijving in het oog springen.

1e *Voorbeeld.* Zij $a = 50^\circ\, 10'\, 30''$. $b = 40^\circ\, 0'\, 10''$. $A = 42^\circ\, 15'\, 14''$.

Hier is $a$ tusschen $b$ en $180^\circ - b$ gelegen, zoodat er slechts één driehoek met de gegevens bestaanbaar is, zullende B gelijksoortig met $b$ en dus $< 90^\circ$ zijn.

*Berekening volgens de 1e oplossing.*

$$l \sin b = 9{,}8080926$$
$$l \sin A = 9{,}8276387$$
$$9{,}6357313$$
$$l \sin a = 9{,}8853636$$
$$l \sin B = 9{,}7503677$$
$$B = 34^\circ\, 15'\, 3''\, 2.$$

$$l\, tg\, b = 9{,}9238563$$
$$l \cos A = 2{,}8693330$$
$$l\, tg\, p = 9{,}7931893$$
$$p = 31^\circ\, 50'\, 46''$$
$$q = 44\ \ 44\ \ 50''$$
$$c = 76^\circ\, 35'\, 36''$$

$$l \cos a = 9{,}8064817$$
$$l \cos p = 9{,}9291471$$
$$9{,}7356288$$
$$l \cos b = 9{,}8842363$$
$$l \cos q = 9{,}8513925$$
$$q = 44^\circ\, 44'\, 50''$$

$c$ is hier gelijk de som der segmenten $p$ en $q$, uithoofde $q < p$ en dientengevolge de loodrechte boog binnen den driehoek valt.

$$l \cos b = 9{,}8842363$$
$$l\, tg\, A = 9{,}9583058$$
$$l \cot P = 9{,}8425421$$
$$P = 55^\circ\ \ 9'\, 59''$$
$$Q = 66\ \ 26\ \ 21$$
$$C = 121^\circ\, 36'\, 20''.$$

$$l\, tg\, b = 9{,}9238563$$
$$l \cos P = 9{,}7567851$$
$$l \cot a = 9{,}9211182$$
$$l \cos Q = 9{,}6017596$$
$$Q = 66^\circ\, 26'\, 21''$$

2e *Voorbeeld.* Gegeven $a = 65^\circ 33' 40''$. $b = 78^\circ 20' 30''$. $A = 63^\circ 18' 20''$.

In dit voorbeeld ligt $a$ niet tusschen $b$ en $180^\circ - b$, zoodat er twee verschillende driehoeken mogelijk zijn. Men zal vinden

$$B = 73^\circ\ 57'\ 55'',2 \qquad B = 106^\circ\ \ 2'\ 4'',8$$
$$C = 102\ \ 53\ \ 32\ ,4 \qquad C = 33\ \ 19\ 10\ ,4$$
$$c = 96\ \ 37\ \ 24\ ,2 \qquad c = 64\ \ \ 2\ 17\ ,4.$$

## VIde GEVAL.

*Gegeven zijnde twee hoeken* A *en* B *met eene tegenoverliggende zijde* $a$, *te vinden de beide overige zijden* $b$, $c$, *benevens den derden hoek* C.

De beoordeeling over het al of niet bestaanbaar zijn van twee driehoeken, die met de gegevens overeenstemmen, geschiedt met

(1) Uit de formule

$$\sin c = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$$

blijkt, dat men 2 waarden voor c kan vinden, n.l. c of $180° - c$.

Zij nu: $A < B$

dan is $a < b$

Er zal nu de tweede driehoek voldoen, dus kent men van de zijde a over A en de zijde $180° - b$ over B en daar $A < B$ moet dus $a < 180° - b$

of $A < 180° - B$

of $B < 180° - A$

dus $A < B < 180° - A$ . . . . . . . . (α)

Is dit nu omgekeerd waar, dan bewijst men tevens tegelijkertijd, dat er 2 driehoeken moeten zijn.

Door een figuur wordt dit alles opgehelderd.

Uit (α) volgt: $A < 180° - A$

of $A < 90°$

Fig. 1.

Zij $\Delta CAB$ de eene driehoek, waarin

$B > A$ en $B < 180° - A$

Immers bij gaande boven neder tot de loodrechte boog CD, dus te groote hoeken de scherpe hoeken, dus te kleine hoeken de stompe hoeken.

Verlengt men nu by AC, dan is $CA' = 180° - b$; neemt men $B'D = BD$ dan is $CB' = CB$ en dus zal $\Delta A'CB'$ de 3 zelfde gegevens A, B, a bevatten, maar in plaats van b treedt hij de zijde $180° - b$.

II

Zij nu $A > B$

dan is $a > b$

en zullen er 2 driehoeken zijn, dus moet $a > 180° - b$

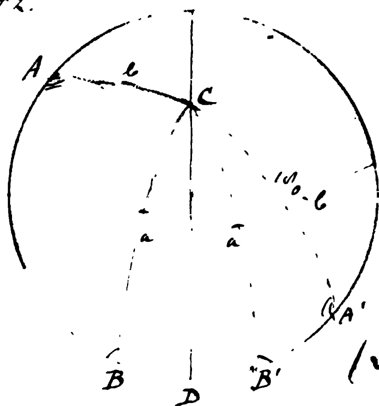
of $A > 180° - B$

of $B > 180° - A$

dus $A > B > 180° - A$ . . . . . . (β)

Is dit omgekeerd waar, dan bewijst men tevens tegelijkertijd, dat er 2 driehoeken moeten zijn.

Door een figuur wordt dit alles opgehelderd.




Uit (β) volgt nu:

$A > 180 - A$

of $A > 90$.

Zij nu Δ CAB een Δ waarin

$A > 90 \quad B < A \quad B > 180 - A$

Verlengt men nu by AC, en zij neemt men $B'D = BD$, dan zal Δ CA'B' de tweede Δ zijn; zij heeft dus A, B a, maar in plaats van b nu $180 - b$.

(2 gevallen B kan < of > 90. 2 figuren)
Het bewijs voor de andere gevallen)

## III

Zij nu $A < B$

dan is $a < b$

en zal er nu slechts 1 driehoek zijn, dan moet

$a > 180 - b$

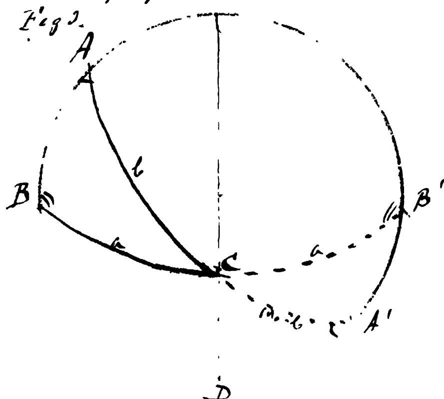
of $A > 180 - B$

of $B > 180 - A$

dus $B > A$

als dit dus omgekeerd waar is, dan is er slechts 1 Δ. Uit dit laatste volgt nu $B > 90$.

De figuur is dan als volgt: Zij Δ CAB de zij; verleng dan CA tot in A', zij neemt $DB' = DB$ dan zal Δ CA'B' niet ontstaan; het punt B' valt niet te ver, in Δ CA'B' komen nu niet dan 3 gegevens voor.




2 gevallen. $A >$ of $< 90$.

## IV

Zij nu $A > B$

dan is $a > b$

en zal er nu slechts 1 driehoek zijn, dan moet:

A, B, a, b
A, B, a, 180-b

$a < 180 - b$

of $A < 180 - B$

$B < 180 - A$

of $B < A$

behulp van den navolgenden regel, welke door eene gelijksoortige redeneering als die voor het V[de] geval verkregen wordt, en daarenboven uit de beschouwing van den pooldriehoek af te leiden is, te weten:

Is $a > 90^\circ$ $A > B$ en $A + B > 180^\circ$,
of $a < 90^\circ$ $A < B$ en $A + B < 180^\circ$,

dan heeft de zijde $b$ twee verschillende waarden.

Is echter $A > B$ en $A + B < 180^\circ$,
of $A < B$ en $A + B > 180^\circ$,

dan bestaat er slechts ééne waarde voor de zijde $b$, welke alsdan met den hoek B steeds gelijksoortig zal zijn· Men kan dezen regel insgelijks aldus voorstellen:

*Er zal met de gegevens slechts één driehoek overeenstemmen, indien de hoek* A *tusschen den hoek* B *en zijn supplement gelegen is;* B *en* $b$ *zullen alsdan gelijksoortig zijn. In het tegenovergestelde geval zullen er twee driehoeken bestaan, mits* A *en* $a$ *gelijksoortig zijn.*

1[e] *Oplossing.* De grondformulen voor dit geval dienstig, zijn

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\cot a \sin c = \sin B \cot A + \cos c \cos B.$$

Door gelijksoortige herleiding als in het voorgaande geval verkrijgt men het volgende stelsel voor de berekening der drie onbekenden:

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A},$$

$$\tan q = \tan a \cos B, \qquad \tan Q = \cos a \tan B,$$

$$\sin p = \frac{\sin q \tan B}{\tan A}, \qquad \sin P = \frac{\cos A \sin Q}{\cos B},$$

$$c = \begin{cases} p + q \\ 180^\circ - p + q \end{cases} \qquad C = \begin{cases} P + Q, \\ 180^\circ - P + Q: \end{cases}$$

Ook deze formulen kunnen gemakkelijk uit de figuur worden afgeleid, wanneer men nagaat, dat $p$ en $q$ de stukken der zijde $c$ en P en Q de deelen van den hoek C voorstellen. De dubbele oplossing wordt veroorzaakt door de beide supplementaire waarden, die uit $\sin p$ en $\sin P$ gevonden worden, terwijl slechts de positieve waarden van $c$ en C in aanmerking komen.

Uit de eerste formule volgt, dat in alle gevallen voor de bestaanbaarheid vereischt wordt

$$\sin a \sin B > \sin A.$$

Voor waarden van $b$, die tot 90° naderen, gebruike men de formule

$$\tang (45° - \tfrac{1}{2} b) = \pm \sqrt{\frac{\tang \tfrac{1}{2}(A - \varphi)}{\tang \tfrac{1}{2}(A + \varphi)}},$$

waarin $\sin \varphi = \sin a \sin B.$

2[e] *Oplossing.* Men berekent eerst de zijde $b$ uit de formule

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$$

en daarna $c$ en C door dezelfde Nep. analogiën als in de 2[e] oplossing van het voorgaande geval. Alle opmerkingen daar gemaakt, gelden ook hier. Is eene der beide grootheden C en $c$ door de Nep. analogien verkregen, dan kan de andere ook door de sinusformule worden gevonden.

1[e] *Voorbeeld.* Zij $a = 109° 15' 33''$. $A = 139° 53' 52''$. $B = 42° 42' 46$.

Hier is $A > B$ en $> 180° - B$, zoodat er twee driehoeken met de gegevens zullen overeenstemmen.

*Berekening volgens de 2[e] oplossing.*

$l \sin a = 9{,}9749887$
$l \sin A = 9{,}8089892$
(*) $0{,}1659995$
$l \sin B = 9{,}8314369$
$l \sin b = 9{,}9974364$
$b = 83° 46' 50''$
en $b = 96° 13' 10''$

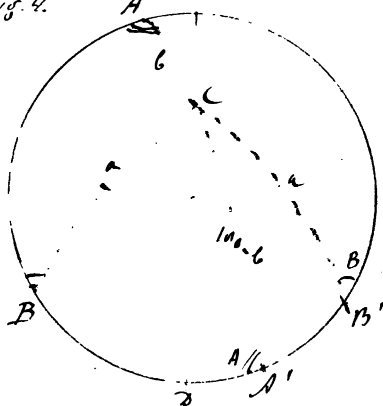
$A = 139° 53' 52''$
$B = 42\ \ 42\ \ 46$

| | | |
|---|---|---|
| $A + B = 182\ \ 36\ \ 38$, | $\tfrac{1}{2}(A + B) = 91° 18' 19''$ | $l \sin 9{,}9998872$ |
| $A - B = 97\ \ 11\ \ 6$ | $\tfrac{1}{2}(A - B) = 48° 35' 33''$ | $l \sin 9{,}8750755$ |
| | | $0{,}1248117$ |

als dit dus omgekeerd voor is, dan is er slechts 1 D.
Nu 1 de beide lookte voorwaarden uitdat nu

$B < 90$

de figuur is derhalve:




Zij Δ CAB de ley; verleng dan CA tot A' en maak DB' = DB dan zal Δ CA'D' niet veranderen; het punt B' valt naar ... en in Δ CA'D' komen de 3 gegevens niet voor.

Leiden 17 Nov. 06.

---

Bewijs, dat in de verwisselende gevallen het punt B' moet vallen, zooals in de fig. is aangegeven.

Fig 1.
Volgens de stelling uit de stereometrie, dat v. helling van een lijn op een vlak kleiner is, dan elke andere hoek van die lijn met een lijn in dat vlak, zal, daar bij CD de helling is van de lijn MC op het vlak v.d. grootste cirkel ADA' (M = middelpunt bol), zal zijn bij CD kleiner is dan elke andere bij door C getrokken. CD' moet vallen tusschen CD en CA'.
Voor nu $a < 180 - b$ enz.

---

Fig 2.
Hier is CD het supplement v.d. helling van MC en dus is elke andere boog door C grooter, kleiner dan CD en nu dus te kleiner, naar mate hij verder van CD verwijderd is en omgekeerd.
Voor nu $a > 180 - b$ moet B' vallen tusschen D en A'.

---

Fig 3. CD is weer de helling en dus elke andere boog is grooter en grooter naarmate ze verder van CD af is.
Voor nu $a > 180 - b$ moet B' verder van D vallen dan A'.

---

Fig 4. CD is het supplement v.d. helling; dus elke andere boog is kleiner, en wel kleiner naarmate ze verder van CD ligt en omgekeerd.
Voor nu $a < 180 - b$ moet B' verder dan A' vallen.

Z. C. Z.

---

Leiden 3 Nov. 06.

# Recapitulatie

B > A en B < 180 − A ..... 2 driehoeken
B < A en B > 180 − A ..... 2 "
B > A en B > 180 − A ..... 1 "
B < A en B < 180 − A ..... 1 "

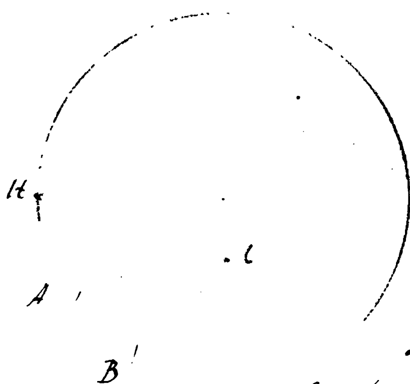
of als men leeren wil uit lezen:
als de hoek, over de onbekende zijde gelegen, gelegen is tusschen den anderen hoek en zijn supplement, dan zijn er 2 driehoeken

b.v. A = 40° en B = 70° (70 ligt in tusschen 40 en 140)

als de hoek, over de onbekende zijde gelegen, niet gelegen is tusschen den anderen hoek en zijn supplement, dan is er slechts 1 driehoek.

b.v. A = 50° en B = 140° (140 is grooter dan 50 en dan 120.)

---




Leiden 30 Nov. 06.
De standhoeken die de bogen CB, CA elk maken met BD, welke een kleinsten waarde aannemen quoten; het punt van overgang ligt juist in een punt H, zoo gelegen, dat bg HD = 90°.
Dit volgt onmiddellijk uit de stelling der stereometrie die zegt, namelijk
men laat een hoek, en door het ene been een vlak ⊥ vlak van den hoek, dat dan van alle vlakken die door het andere been gaan, dat vlak den kleinsten hoek maakt met het eerste, dat ook loodrecht staat op het vlak van den hoek, terwijl dan juist de grootste hoek de standhoek is. (v. Fer...)

$a = 109^\circ\ 15'\ 33''$
$b = \ \ 83\ \ 46\ \ 50$
$a - b = \ \ 25\ \ 28\ \ 43,\quad \frac{1}{2}(a-b) = 12^\circ\ 44'\ 21'',5\quad l\,tg\ 9,3542635$
$l\,tg\ \frac{1}{2}c = 9,4790752$
$\frac{1}{2}c = 16^\circ\ 46'\ 13'',2$
$c = 33^\circ\ 32'\ 26'',4$

$a = 109^\circ\ 15'\ 33''$
$b = \ \ 96\ \ 13\ \ 10\qquad 9,1248117$
$a - b = \ \ 13\ \ \ 2\ \ 23,\quad \frac{1}{2}(a-b) = 6^\circ\ 31'\ 11'',5\quad l\,tg\ 9,0579959$
$l\,tg\ \frac{1}{2}c = 9,1828076$
$\frac{1}{2}c = 8^\circ\ 39'\ 42'',2$
$c = 17^\circ\ 19'\ 24'',4$

*Berekening van den hoek* C *en de zijde c, volgens de* 1e *oplossing.*

| | |
|---|---|
| $l\cos a = 9,5183056\ -$ | $l\sin Q = 9,9807449\ -$ |
| $l\,tg\,B = 9,9652894$ | $l\cos A = 9,8836026\ -$ |
| $l\cot Q = 9,4835950\ -$ | $9,8643475\ +$ |
| $Q = -\,73^\circ\ 3'\ 51'',2$ | $l\cos B = 9,8661475$ |
| | $l\sin P = 9,9982000$ |
| $P = 84^\circ\ 47'\ 13'',5$ en | $P = 95^\circ\ 12'\ 46'',5$ |
| $Q = -\,73\ \ \ 3\ \ 51\ ,2$ | $Q = -\,73\ \ \ 3\ \ 51\ ,2$ |
| $C = P + Q = 11^\circ\ 43'\ 22'',3$ | $C = P + Q = 22^\circ\ 8'\ 55'',3$ |
| $l\sin C = 2,3078766$ | $l\sin C = 9,5763547$ |
| $(^*) = 0,1659995$ | $(^*) = 0,1659995$ |
| $l\sin c = 9,4738761$ | $l\sin c = 9,7423542$ |
| $c = 17^\circ\ 19'\ 24'',6$ | $c = 33^\circ\ 32'\ 26'',1$ |

De beide waarden van $c$ moeten $< 90^\circ$ genomen worden, vermits $C < A$ zijnde, ook $c < a$ moet zijn.

*Aanmerking.* De eerste wijze van berekenen der twee waarden van $c$ is in zoo verre verkieslijk boven de tweede, omdat uit deze laatste niet rechtstreeks kan opgemaakt worden, welke der beide reeds gevondene waarden van de zijde $b$ met die van den hoek C of van de zijde $c$ overeenstemmen.

2e *Voorbeeld.* Zij $a = 38^\circ\ 15'\ 15'',2$. $A = 118^\circ\ 50''$. $B = 40^\circ\ 13'\ 5''$.

Hier ligt A tusschen den hoek B en zijn supplement, zoodat er slechts één driehoek mogelijk is. Men zal vinden

$b = 27^\circ\ 9'9'',44.\quad c = 17^\circ\ 9'\ 26'',64.\quad C = 24^\circ\ 40\ 1'1''.$

100. Zie hier nog eene meetkundige beschouwing, welke tevens tot nadere toelichting der beide twijfelachtige gevallen zal kunnen strekken.

ADA'$d$ (fig. 42) verbeelde een grooten cirkel des bols, AA' den halven omtrek van een tweeden grooten cirkel, loodrecht op het vlak des eersten staande, en waarop een willekeurig punt P genomen is, zijnde PA $< 90°$. Men trekke door dit punt onderscheidene bogen van groote cirkels B$f$, C$e$, D$d$ enz., dan zullen de gedeelten PB, PC enz. achtereenvolgens toenemen, zoodat de loodrechte bogen PA, PA', de kleinste en grootste afstanden van het punt P tot den cirkel ADA'$d$ zullen voorstellen. Immers, in den rechthoekigen driehoek PBA zal $\angle$ B scherp, en dus AP $<$ BP zijn. In den driehoek PCB is $\angle$ $C$ insgelijks scherp, doch $\angle$ B stomp, dus PB $<$ PC enz. De scherpe hoeken B, C enz. zullen achtereenvolgens verminderen tot in het punt, dat op 90° afstand van A ligt, waarna die hoeken op nieuw zullen aangroeien, om in het punt A' gelijk 90° te worden. Onderstelt men verder, dat de punten E en F op gelijke afstanden van het punt A', als de punten C en B van A verwijderd zijn, dan zal ook boog AB $=$ boog A$b$ en AC $=$ A$c$, dus ook PB $=$ P$b$ en PC $=$ P$c$ zijn. Nu toont de figuur ten duidelijkste aan, dat de driehoeken CBP en C$b$P twee gelijke zijden met een gemeenschappelijken hoek C over eene dezer zijden hebben, en zulks insgelijks het geval is met hunne supplementsdriehoeken $f$P$e$, FP$b$. Voor de beide eersten zal blijkbaar

$$\angle C < 90°\,,\ BP < PC\,,\ PB + PC < 180°\,,$$

en voor de beide laatsten

$$\angle e < 90°\,,\ Pf > Pe \text{ en } Pf + Pe > 180°.$$

Met de driehoeken DBP, D$b$P, en hun supplements-driehoek zal zulks evenzeer het geval zijn.

Beschouwt men daarentegen den driehoek PFC, dan blijkt hieruit, dat er met de gegeven zijden PF, PC en den overstaanden hoek F, slechts één driehoek mogelijk is, dewijl in den driehoek FP$c$, de zijde FC$c$ $> 180°$ wordt, en zulks eveneens zou plaats vinden bij zijn supplements-driehoek P$be$, samengesteld uit de zijden P$e$, P$b$, en den hoek $b$. Voor den eersten dezer driehoeken heeft men

$$CP < FP \text{ en } CP + FP < 180°,$$

wordt $\angle A$ kort hoe nodig is. Er voldoet dus slechts 1 Δ.

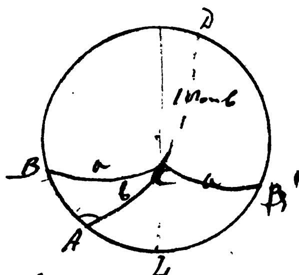
4de geval.

Nu is dan $a > b$ en $a < 180 - b$

Hieruit volgt $180 - b > a > b$

dus $180 - b > b$

of $b < 90^\circ$




Zij nu $CA = b$, dan moet omdat $a > b$ de bg $CB$ boven $CA$ vallen. De Δ $CAB$ voldoet dus. Neemt men nu $CB' = CB$ en verlengt men $CA$, dan moet $B'$ beneden $D$ vallen want $a < 180 - b$. Maar dan is Δ $B'AC$ (naar boven omgeslagen) een Δ met een bg zijde $> 180^\circ$. Van den Δ $B'AC$ (naar onder omgeslagen) kan een grootste zijde zijn, want $\angle A$ komt kleiner niet voor. Er voldoet dus slechts 1 Δ.

## Recapitulatie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a < b$ | $a < 180 - b$ | . . . | 2 driehoeken |
| $a > b$ | $a > 180 - b$ | – | 2 – |
| $a < b$ | $a > 180 - b$ | – – – | 1 " |
| $a > b$ | $a < 180 - b$ | | 1 " |

Waaruit nu deze regel volgt:

Bij het overeenkomende dubbelzinnige geval bij de boldriehoeken (2 zijden en 1 hoek overeen) zullen er 2 driehoeken zijn, wanneer de zijde over den hoek kleiner is dan de andere en kleiner dan haar supplement of wanneer de zijde over den hoek grooter is dan de andere en grooter dan haar supplement; terwijl er slechts 1 driehoek mogelijk is als de zijde over den hoek gelegen is tusschen de andere en haar supplement.

voor den laatsten daarentegen, zal

$$Pe > Pb \text{ en } Pe + Pb < 180^\circ,$$

hetgeen alles met de vroeger gegevene voorwaarden overeenstemt.

Voor het VI[e] geval is het onnoodig eene afzonderlijke figuur te ontwerpen, dewijl de daartoe betrekkelijke voorwaarden, door middel van den pooldriehoek, onmiddellijk uit die voor het $V_e$ geval kunnen afgeleid worden.

101. Ofschoon de hiervoor vermelde eigenschappen steeds voldoende zijn, om allen twijfel op te heffen nopens de beslissing of een der elementen eens driehoeks scherp of stomp aan te nemen zij, achten wij het echter niet ondienstig, hier kortelijk in eenig onderzoek te treden aangaande de onderscheidene gevallen, die zich in elken driehoek, ten aanzien van het scherp of stomp zijn der zes elementen, kunnen voordoen.

In de eerste plaats laat zich gemakkelijk betoogen, dat indien elke der drie hoeken scherp is, de drie zijden alsdan insgelijks scherp moeten zijn. Immers, daar de loodrechte boog CD (fig. 40) in dat geval binnen den driehoek valt, en elk der hoeken P, Q scherp is, zullen de zijden AC en BC eveneens scherp moeten zijn (n°. 88), terwijl het op gelijke wijze blijkt, dat dit met de derde zijde AB evenzoo zal plaats hebben.

Beschouwen wij in de tweede plaats een driehoek, wiens hoeken allen stomp zijn. De loodrechte boog valt alsdan weder binnen den driehoek, doch hier behooren twee verschillende gevallen ten opzichte der hoeken P en Q onderscheiden te worden. Deze kunnen namelijk beide scherp, of een derzelve, bijv. P, kan stomp, en de andere scherp zijn. In het eerste geval zal elke der zijden AC en BC stomp moeten zijn, en aangezien elk der segmenten AD en BD scherp is, zoo kan AB scherp of stomp zijn. In het tweede geval is de zijde AC scherp en BC stomp, doch aangezien AD gelijksoortig met den hoek P, en dus stomp is, zal ook AB stomp moeten zijn; waaruit gemakkelijk op te maken valt, dat men, bij drie stompe hoeken, zoo wel drie stompe zijden, als twee stompe en eene scherpe zijde kan hebben, in welk laatste geval de scherpe zijde noodzakelijk over den kleinsten hoek zal liggen. Wanneer wij dan het scherp of stomp zijn van eenig element des driehoeks, kortheidshalve door bijvoeging van de letter *s* of S aanwijzen, dan verkrijgen wij reeds de drie navolgende gevallen :

*

| | | |
|---|---|---|
| $As$, $Bs$, $Cs$ | $as$, $bs$, $cs$. . . . . . | (1) |
| $AS$, $BS$, $CS$ | $aS$, $bS$, $cS$. . . . . | (2) |
| | $aS$, $bS$, $cs$. . . . . | (3) |

Passen wij thans elk dezer drie gevallen op een der supplements-driehoeken toe, waarvoor wij dien op de zijde $c$ beschreven kiezen, dan ziet men gemakkelijk in, dat hieruit nog de navolgende gevallen voortvloeien:

| | | |
|---|---|---|
| $AS$, $BS$, $Cs$ | $aS$, $bS$, $cs$. . . . . | (4) |
| $As$, $Bs$, $CS$ | $as$, $bs$, $cS$. . . . . | (5) |
| | $as$, $bs$, $cs$. . . . . | (6) |

Gebruikt men hierbij den supplements-driehoek op de zijde $b$, dan geeft ons het derde geval nog het volgende:

| | | |
|---|---|---|
| $As$, $BS$, $Cs$. | $as$, $bS$, $cS$ . . . . | (7) |

Uit dit alles blijkt alzoo, dat er hoogstens *zeven* gevallen mogelijk zijn, te weten:

1°. *Drie scherpe hoeken met drie scherpe zijden.*

2°. *Drie stompe hoeken, met* { *een scherpen en twee stompe hoeken.* / *drie stompe zijden.* }

3°. *Een scherpe en twee stompe hoeken, met eene scherpe en twee stompe zijden.*

4°. *Een stompe en twee scherpe hoeken, met* { *drie scherpe zijden.* / *eene stompe en twee scherpe zijden.* / *eene scherpe en twee stompe zijden.* }

Aangezien de zijden en hoeken eens bolvormigen driehoeks, gelijk reeds in n°. 73 opgemerkt is, overeenkomen met de zijvlakken en standhoeken van een drievlakkigen hoek, wiens hoekpunt in het middelpunt van den bol ligt, zoo zal het onnoodig zijn hier bij te voegen, dat de thans afgehandelde zes gevallen der bolvormige driehoeksmeting, evenzeer toepasselijk zijn op de berekening van drie der zes elementen eens drievlakkigen hoeks, wanneer de drie overige gegeven zijn.

## § 18.

### *Over het berekenen der oppervlakte van een bolvormigen driehoek.*

102. Indien men het oppervlak van den bol O noemt, en het spherisch exces $A + B + C - 180^\circ = 2\delta$ stelt, dan zal, gelijk

in de meetkunde geleerd wordt *), het oppervlak des bolvormigen driehoeks ABC uitgedrukt worden door $\frac{\delta}{4R} \times O$, of in vierkante lengte-eenheden, door $\frac{\delta}{R} \times r^2 \pi$, waarin R den rechten hoek, en $r$ den straal des bols beteekent. In enkele gevallen der bolvormige driehoeksmeting laat zich de waarde van $\delta$ of van het halve spherische exces, onmiddellijk uit de gegevene elementen des driehoeks berekenen, zoo als wij thans zullen aantoonen.

Uit de in n°. 95 betoogde formulen (18) en (20) volgt:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c},$$

De eerste met $\sin \frac{1}{2} C$, en de tweede met $\cos \frac{1}{2} C$ vermenigvuldigd zijnde, zoo geeft het verschil dezer producten

$$-\cos \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \sin \delta = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c} \sin C \quad . \quad (1)$$

Dezelfde formulen geven, door de eerste met $\cos \frac{1}{2} C$, en de tweede met $\sin \frac{1}{2} C$ te vermenigvuldigen, en vervolgens de som der producten te nemen,

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \cos \delta =$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos^2 \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)(1+\cos C) + \cos \frac{1}{2}(a+b)(1-\cos C)}{2 \cos \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C}{\cos \frac{1}{2} c} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

De vergelijkingen (2) en (1) door elkander deelende, komt er

$$\cot \delta = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

waardoor $\delta$ uit twee zijden met den ingesloten hoek kan worden bepaald.

Om de voorgaande formule voor de logarithmische berekening meer geschikt te maken, stelle men, indien $C < 90°$,

$$\frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = tg^2 \varphi,$$

*) Leerboek der Meetkunde. II. § 25.

dan wordt $$\cot\delta = \sec^2\varphi \cot C\,,$$
of $$tg\,\delta = tg\,C \cos^2\varphi.$$

Is $C > 90^0$, dan stelle men $C = 90^0 + C'$, en verder de breuk
$$\frac{\cot\frac{1}{2}a \cot\frac{1}{2}b}{\sin C'} = \sin^2\varphi \text{ of } = \sec^2\varphi\,,$$
naar dat hare getallen-waarde $<$ of $>$ 1.

In het eerste geval vindt men:
$$\cot\delta = -\cos^2\varphi\, tg\, C'\,,$$
en in het tweede
$$\cot\delta = tg^2\varphi\, tg\, C'.$$

103. Schrijft men de form. (1) onder den navolgenden vorm
$$\sin\delta = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}\,,$$
dan zal, stellende als in n°. 98 de wortel-uitdrukking
$$2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} = P\,,$$
en, in aanmerking nemende dat, volgens form. (15) van n°. 94
$$\sin C = \frac{P}{\sin a \sin b}\,,$$
hieruit afgeleid worden:
$$\sin\delta = \frac{P}{4\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$
waardoor $\delta$ uit de drie zijden des driehoeks kan worden berekend.

Er bestaat echter eene voor de logarithmische berekening meer geschikte uitdrukking voor $\delta$, waartoe men onder anderen op de navolgende gemakkelijke wijze kan geraken.

Daar namelijk
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,,$$
en dus
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B) - \cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A+B) + \cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a-b) + \cos\frac{1}{2}c}\,,$$
zoo vindt men hieruit door de gebruikelijke herleiding
$$tg\tfrac{1}{4}\delta \cot\tfrac{1}{4}(180^0 + A + B - C) = tg\tfrac{1}{4}(a+c-b)\, tg\tfrac{1}{4}(b+c-a)$$
$$= tg\tfrac{1}{2}(s-b)\, tg\tfrac{1}{2}(s-a) \quad . \; . \quad (5)$$

Eveneens besluit men uit de vergelijking
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,,$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B) - \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A+B) + \sin \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) - \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2} c},$$

dus ook

$$tg \tfrac{1}{4} \delta \, tg \tfrac{1}{4}(180^\circ + A + B - C) = tg \tfrac{1}{4}(a+b+c) \, tg \tfrac{1}{4}(a+b-c)$$
$$= tg \tfrac{1}{2} s \, tg \tfrac{1}{2}(s-c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Vermenigvuldigende (5) en (6) met elkander, zoo verkrijgen wij hierdoor ter berekening van het spherisch exces $\delta$ de fraaie formule

$$tg \tfrac{1}{4} \delta = \sqrt{tg \tfrac{1}{2} s \, tg \tfrac{1}{2}(s-a) \, tg \tfrac{1}{2}(s-b) \, tg \tfrac{1}{2}(s-c)} \quad . \quad (7)$$

welke men aan LHUILLIER verschuldigd is.

De formulen (1), (2) en (3) op den rechthoekigen driehoek waarin $C = 90^\circ$ toepassende, bekomen wij voor dat bijzonder geval:

$$\sin \delta = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c},$$

$$\cos \delta = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c},$$

$$tg \, \delta = tg \tfrac{1}{2} a \, tg \tfrac{1}{2} b,$$

$$\sin 2\delta = \frac{\sin a \sin b}{2 \cos^2 \frac{1}{2} c} = \frac{\sin a \sin b}{1 + \cos c},$$

$$\cos 2\delta = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}, \quad tg \, 2\delta = \frac{\sin a \sin b}{\cos a + \cos b}.$$

## § 19.

### *Bijzondere gevallen van oplossing.*

104. Voor de oplossing van een geval van driehoeksmeting is het niet noodzakelijk, dat de gegevens elementen van den driehoek zijn; elke drie onderling onafhankelijke combinatiën van elementen, zullen evenzoo voldoende zijn om den driehoek te bepalen. Ook bepaalde betrekkingen tusschen twee of meer elementen kunnen in plaats van de gegevens treden. Van een en ander zullen wij eenige voorbeelden behandelen en daarbij telkens den driehoek als bekend aanmerken, wanneer op eene of andere wijze drie elementen afzonderlijk zijn berekend, zoodat het geval tot een der hoofdgevallen van § 17 is teruggebracht.

1e *Voorbeeld. Gegeven eene zijde $a$, de tegenovergelegen hoek* A *en de som of het verschil der beide andere zijden of hoeken.*

Door de formulen van Gauss

$$\sin \tfrac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(b - c)}{\cos \tfrac{1}{2} a} \cos \tfrac{1}{2} A,$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(b - c)}{\sin \tfrac{1}{2} a} \cos \tfrac{1}{2} A,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(b + c)}{\cos \tfrac{1}{2} a} \sin \tfrac{1}{2} A,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(b + c)}{\sin \tfrac{1}{2} a} \sin \tfrac{1}{2} A,$$

kan men in elk dezer gevallen twee onbekende elementen van den driehoek berekenen en daarna door de sinusformule de andere.

2e *Voorbeeld. Gegeven twee zijden $a$ en $b$, benevens het verschil of de som der tegenovergelegen hoeken* A *en* B.

Door de formule (24) van § 16 vindt men in elk der beide gevallen de hoeken A en B.

3e *Voorbeeld. Gegeven eene zijde $c$, een aangelegen hoek* B *en het verschil der beide andere zijden $a$ en $b$.*

Uit de formulen voor de tangenten der halve hoeken uitgedrukt in de drie zijden, volgt:

$$\sin (s - a) \tan \tfrac{1}{2} A = \sin (s - b) \tan \tfrac{1}{2} B.$$

Hierin zijn nu $c$ en $a - b$ bekend, dus heeft men ook $(s - a)$ en $(s - b)$, zoodat A kan berekend worden, waardoor drie elementen des driehoeks gevonden zijn.

4e *Voorbeeld. Gegeven* (fig. 40) *de hoek* C, *de loodlijn* $CD = \varphi$ *en de som der twee zijden $a + b = p$.*

Uit de formulen

$$\sin \varphi = \sin a \sin B,$$

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B,$$

volgt

$$\sin a \sin b = \frac{\sin c \sin \varphi}{\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Verder is

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin c \cos C$$

$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b + 2 \sin a \sin b \cos^2 \tfrac{1}{2} C$$

of, lettende op formule $(a)$,

$$\cos c = \cos p + \sin \varphi \sin c \cot \tfrac{1}{2} C$$

waarin het element $c$ de eenige onbekende is. Om haar op te lossen, stellen wij

$$\sin \varphi \cot \tfrac{1}{2} C = \cot q,$$

dan wordt

$$\sin (q - c) = \cos p \sin q,$$

waaruit de waarde van $c$ wordt gevonden; daarna vindt men gemakkelijk de nog onbekende elementen.

105. Wij zullen nu een paar voorbeelden behandelen, waarbij tusschen de gegevens bepaalde betrekkingen bestaan.

Zij in de eerste plaats de driehoek *gelijkbeenig* en stellen wij $r = b$, dan is ook (n°. 79) $A = B$. De grondformulen geven in deze onderstelling

$$\begin{aligned} \cos c + \tang a \sin c \cos A &= 1, \\ \cos c &= \cos^2 a + \sin^2 a \cos C, \\ -\cos C + \tang A \sin C \cos a &= 1, \\ \cos C &= -\cos^2 A + \sin^2 A \cos c. \end{aligned}$$

Deze vier formulen zijn toereikende voor alle gevallen van oplossing. Door herleiding en ook door middel van de formulen van § 16 vindt men:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \cot a \tang \tfrac{1}{2} c, \\ \sin \tfrac{1}{2} C &= \frac{\sin \tfrac{1}{2} c}{\sin a}, \\ \cos a &= \cot A \cot \tfrac{1}{2} C, \\ \cos \tfrac{1}{2} c &= \frac{\cos \tfrac{1}{2} C}{\sin A}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

welke formulen ook onmiddellijk uit de figuur kunnen gevonden worden, wanneer men de loodlijn uit den top op de basis trekt.

Is de driehoek *gelijkzijdig*, dan is

$$a = b = c$$
$$A = B = C,$$

en hierdoor vindt men na eenige herleiding de eenvoudige betrekking

$$2 \cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} A = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

die men ook onmiddellijk aan de figuur kan ontleenen, en waardoor de zijde uit den hoek en de hoek uit de zijde kan berekend worden.

106. Onderstellen wij, dat de hoeken verbonden zijn door de betrekking

$$C = A + B.$$

Men zal alsdan ter berekening der onbekende elementen, het

navolgend stelsel formulen vinden, waarvan wij het betoog aan den lezer ter oefening mogen overlaten:

$$sin^2 \tfrac{1}{2} a = - cot\,B\, cot\,C, \qquad sin^2 \tfrac{1}{2} b = - cot\,A\, cot\,C,$$
$$cos^2 \tfrac{1}{2} c = cot\,A\, cot\,B, \qquad sin^2 \tfrac{1}{2} c = sin^2 \tfrac{1}{2} a + sin^2 \tfrac{1}{2} b,$$

$$sin^2 \tfrac{1}{2} a = sin \tfrac{1}{2} (b + c) \, sin \tfrac{1}{2} (c - b),$$
$$sin^2 \tfrac{1}{2} b = sin \tfrac{1}{2} (a + c) \, sin \tfrac{1}{2} (c - a),$$
$$cos^2 \tfrac{1}{2} c = cos \tfrac{1}{2} (a + b) \, cos \tfrac{1}{2} (a - b),$$

$$cos\,A = tg \tfrac{1}{2} b \, cot \tfrac{1}{2} c,$$
$$cos\,B = tg \tfrac{1}{2} a \, cot \tfrac{1}{2} c,$$
$$cos\,C = - tg \tfrac{1}{2} a \, tg \tfrac{1}{2} b,$$

$$cos \tfrac{1}{2} (a + b) = cos \tfrac{1}{2} c \, cot \tfrac{1}{2} C, \qquad cos \tfrac{1}{2} (a - b) = cos \tfrac{1}{2} c \, tg \tfrac{1}{2} C,$$
$$sin \tfrac{1}{2} (c + b) = sin \tfrac{1}{2} a \, cot \tfrac{1}{2} A, \qquad sin \tfrac{1}{2} (c - b) = sin \tfrac{1}{2} a \, tg \tfrac{1}{2} A,$$

$$tg \tfrac{1}{2} C = tg \tfrac{1}{2} (A + B) = \sqrt{\frac{cos \tfrac{1}{2} (a - b)}{cos \tfrac{1}{2} (a + b)}},$$

$$tg \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{sin \tfrac{1}{2} (a - b)}{sin \tfrac{1}{2} (a + b)} = \sqrt{\frac{cos \tfrac{1}{2} (a + b)}{cos \tfrac{1}{2} (a - b)}},$$

$$tg \tfrac{1}{2} A = tg \tfrac{1}{2} (C - B) = \sqrt{\frac{sin \tfrac{1}{2} (c - b)}{sin \tfrac{1}{2} (c + b)}}.$$

Uit de voorgaande formulen blijkt, dat twee gegevens voldoende zijn ter bepaling eens driehoeks, waarin een der hoeken gelijk aan de som der beide overigen is.

Beschouwen wij thans den supplements-driehoek op de zijde $c$, dan gaan A en B gelijk mede $a$ en $b$ in hunne supplementen over, en het is klaar, dat hieruit alsdan een driehoek ontstaat, waarin de som der hoeken gelijk aan vier rechte hoeken is. Voor het bijzonder geval dus van

$$A + B + C = 360^0,$$

veranderen de formulen hiervoor gevonden in de navolgende:

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = cot\,B\, cot\,C. \quad cos^2 \tfrac{1}{2} b = cot\,A\, cot\,C. \quad cos^2 \tfrac{1}{2} c = cot\,A\, cot\,B.$$

$$sin^2 \tfrac{1}{2} + sin^2 \tfrac{1}{2} b + sin^2 \tfrac{1}{2} c = 2,$$
$$cos\,a + cos\,b + cos\,c = -1,$$

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = - cos \tfrac{1}{2} (b + c) \, cos \tfrac{1}{2} (b - c),$$
$$cos^2 \tfrac{1}{2} b = - cos \tfrac{1}{2} (a + c) \, cos \tfrac{1}{2} (a - c),$$
$$cos^2 \tfrac{1}{2} c = - cos \tfrac{1}{2} (a + b) \, cos \tfrac{1}{2} (a - b),$$

$$cos\,A = - cot \tfrac{1}{2} b \, cot \tfrac{1}{2} c,$$
$$cos\,B = - cot \tfrac{1}{2} a \, cot \tfrac{1}{2} c,$$
$$cos\,C = - cot \tfrac{1}{2} a \, cot \tfrac{1}{2} b,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b) = -\cos\tfrac{1}{2}c\cot\tfrac{1}{2}C\,, \qquad \cos\tfrac{1}{2}(a-b) = \cos\tfrac{1}{2}c\,tg\,\tfrac{1}{2}C\,,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(b+c) = -\cos\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}A\,, \qquad \cos\tfrac{1}{2}(b-c) = \cos\tfrac{1}{2}a\,tg\,\tfrac{1}{2}A\,,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(a+c) = -\cos\tfrac{1}{2}b\cot\tfrac{1}{2}B\,, \qquad \cos\tfrac{1}{2}(a-c) = \cos\tfrac{1}{2}b\,tg\,\tfrac{1}{2}B\,,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}C = -tg\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}}\,,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \times \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}}.$$

De beide laatste formulen zullen, na behoorlijke letter-verwisseling, insgelijks geldig zijn voor twee andere hoeken des driehoeks.

De pooldriehoek des eersten driehoeks zal de eigenschap hebben dat

$$a + b - c = 180^{\circ}\,,$$

terwijl die des tweeden zal geven

$$a + b + c = 180^{\circ}.$$

De formulen tot deze twee bijzondere gevallen betrekking hebbende, laten zich dus op de bekende wijze onmiddellijk uit de beide voorgaande stelsels afleiden.

## § 20.

### *Oplossing van eenige vraagstukken door middel van de bolvormige driehoeksmeting.*

107. Nademaal de bolvormige driehoeksmeting hare voornaamste toepassing vindt in de aardrijks-, sterre- en zeevaartkunde, zoo verwijzen wij te dezen aanzien naar de leerboeken over die onderwerpen, en zullen ons alzoo slechts bepalen bij enkele vraagstukken van zuiver meetkundigen aard, ten einde tot toepassing der gelegde gronden te kunnen strekken.

108. I<sup></sup>e VRAAGSTUK. *Uit een punt* A, *genomen in de gemeene doorsnede van twee vlakken* P, Q, *zijn twee lijnen* AB, AC *in het eene, en in het andere dezer vlakken getrokken; zoo nu de hoeken* $a$, $b$, $c$, *bekend zijn, welke die beide lijnen zoo onderling, als elk met de gemeene doorsnede der twee vlakken vormen, vraagt men de hoeken te bepalen, waaronder deze lijnen* AB, AC *op de vlakken* Q *en* P *hellen.*

*Oplossing.* Het punt A het toppunt eens drievlakkigen hoeks zijnde, zoo beschouwe men het als middelpunt eens bols, en

men zal dadelijk inzien, dat in den bolvormigen driehoek, welke uit dezen drievlakkigen hoek ontstaat, de drie zijden $a$, $b$, $c$ gegeven zijn, en het er slechts op aankomt de waarden te bepalen der loodrechte bogen $\varphi$, $\varphi'$, vallende op de zijden $c$, $b$.

Nu is in fig. 40

$$\sin \mathrm{CD} = \sin a \sin \mathrm{B},$$

terwijl uit de form. (15) § 16 volgt

$$\sin \mathrm{B} = \frac{2\sqrt{[\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)]}}{\sin a \sin c}.$$

Derhalve

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sin c} \sqrt{[\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)]} \quad . . (1)$$

en door $c$ in $b$ te veranderen,

$$\sin \varphi' = \frac{2}{\sin b} \sqrt{[\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)]}.$$

Schrijvende in de laatste formule $a$ voor $b$, dan bepaalt men hierdoor tevens den hoek, die de gemeene doorsnede der vlakken P, Q vormt met het vlak, gaande door de lijnen AB, AC.

109. II[e] Vraagstuk. *Indien in het vorige vraagstuk de standhoeken* A, B, C *der drie zijvlakken, in plaats van de hoeken* $a$, $b$, $c$ *der drie ribben gegeven zijn, vraagt men dezelfde hoeken als hiervoor te bepalen.*

*Oplossing.* In de vergelijking

$$\sin \varphi = \sin a \sin \mathrm{B},$$

voor $\sin a$ zijne waarde stellende, afgeleid uit de form. (17) § 16, zoo vindt men

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sin \mathrm{C}} \sqrt{[-\cos \mathrm{S} \cos (\mathrm{S}-\mathrm{A}) \cos (\mathrm{S}-\mathrm{B}) \cos (\mathrm{S}-\mathrm{C})]}$$

en door verandering van C in B,

$$\sin \varphi' = \frac{2}{\sin \mathrm{B}} \sqrt{[-\cos \mathrm{S} \cos (\mathrm{S}-\mathrm{A}) \cos (\mathrm{S}-\mathrm{B}) \cos (\mathrm{S}-\mathrm{C})]}.$$

110. III[e] Vraagstuk. *Gegeven zijnde de standhoek der vlakken* P, Q, *benevens de hoeken, die de lijnen* AB, AC *met de gegevene doorsnede dezer vlakken vormen, zoo vraagt men den hoek te bepalen, waaronder deze doorsnede op het vlak der lijnen* AB, AC *helt.*

*Oplossing.* Men zal met weinig moeite inzien, dat dit vraagstuk hetzelfde is als dat om den loodrechten boog $\varphi$ op eenige zijde $c$ eens bolvormigen driehoeks te bepalen, wanneer de beide overige zijden $a$ en $b$, benevens de ingesloten hoek C gegeven zijn.

Men kan hierbij aldus te werk gaan. Volgens de 3e oplossing van het IIIe geval, § 17, is

$$tg\,\tfrac{1}{2}(Q-P)=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$Q=\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}(Q-P),\quad P=\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}(Q-P).$$

De loodrechte boog $CD=\varphi$ wordt alsdan berekend door eene der formulen

$$tg\,\varphi=tg\,a\cos Q,\qquad tg\,\varphi=tg\,b\cos P.$$

De waarde van $\varphi$ laat zich tevens rechtstreeks door middel der gegevens $a$, $b$, C op de volgende wijze uitdrukken.

Men heeft namelijk de vergelijking

$$tg\,a\cos Q=tg\,b\cos(C-Q),$$

of, na ontwikkeling en herleiding,

$$tg\,Q=\frac{tg\,a-tg\,b\cos C}{tg\,b\sin C},$$

waaruit

$$\sec^2 Q=1+tg^2 Q=\frac{tg^2 a+tg^2 b-2\,tg\,a\,tg\,b\cos C}{tg^2 b\sin^2 C}.$$

Nu volgt uit de vergelijking

$$tg\,\varphi=tg\,a\cos Q,$$

$$\cot\varphi=\frac{\sec Q}{tg\,a},$$

die, na substitutie der zoo even gevondene uitdrukking voor $\sec Q$, overgaat in

$$\cot\varphi=\frac{\sqrt{(tg^2 a+tg^2 b-2\,tg\,a\,tg\,b\cos C)}}{tg\,a\,tg\,b\sin C}$$

$$=\frac{\sqrt{(\cot^2 a+\cot^2 b-2\cot a\cot b\cos C)}}{\sin C}.$$

111. IVe Vraagstuk. *Den standhoek van elk der vijf regelmatige lichamen te berekenen.* *)

Noemende dezen standhoek A, den vlakken hoek $a$, dan vindt men met behulp van de formulen (1) en (2), die in n°. 105 gevonden zijn voor de gelijkbeenige en gelijkzijdige bolvormige driehoeken:

1°. Voor het regelmatige *viervlak:*

$$a=60^0.\qquad \cos A=\tfrac{1}{3}.\qquad A=70^0\,31'\,44''.$$

---

*) Vergelijk hiermede: *Leerboek der Meetkunde.* II. *Aanhangsel,*

2°. Voor het regelmatige *zesvlak* (*cubus*):

$$a = 90°. \quad A = 90°.$$

3°. Voor het regelmatige *achtvlak:*

$$a = 60°. \quad \cos A = -\tfrac{1}{3}: \quad A = 109°\ 28'\ 16''.$$

4°. Voor het regelmatige *twaalfvlak:*

$$a = 108°. \quad \cos A = \cot 180°\ \tan 54° = -\tfrac{1}{5}\sqrt{5}.$$

$$\tan A = -2. \quad A = 116°\ 33'\ 54''.$$

5°. Voor het regelmatige *twintigvlak:*

$$a = 60°. \quad \sin \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin 54°}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$\sin A = \tfrac{2}{3}. \quad A = 138°\ 11'\ 23''.$$

112. V<sup></sup>e VRAAGSTUK. *Den inhoud van een parallelopipedum uit te drukken in de lengte der ribben en de hoeken, die zij met elkander maken.*

Zij (fig. 43) in het parallelopipedum OP:

$OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$

en verder AD de loodlijn uit A op het grondvlak neergelaten, dan is de gevraagde inhoud

$$I = \text{inh. parallel. } BC \times AD.$$

Nu is (§ 9) $\quad$ inh. parall. $BC = bc \sin \alpha$;

en in $\triangle$ AOD $\quad$ $AD = a \sin AOD$.

Volgens form. (1) van het 1e *Vraagstuk* is echter

$$\sin AOD = \frac{2}{\sin \alpha} \sqrt{[\sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)]},$$

waarin $\quad s = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$

derhalve

$$I = 2abc \sqrt{[\sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)]} \quad . \; . \; . \; (2)$$

door welke regelmatige formule de inhoud van een scheefhoekig parallelopipedum uit zijne ribben en vlakke hoeken kan berekend worden.

Voor den inhoud van een driehoekig prisma, uitgedrukt in drie ribben en de overeenkomstige vlakke hoeken van denzelfden drievlakkigen hoek, vindt men uit (2)

$$I' = abc \sqrt{[\sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)]}$$

en hieruit voor den inhoud eener driehoekige pyramide uitgedrukt in dezelfde grootheden

$$I' = \tfrac{1}{3} abc \sqrt{[\sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)]}.$$

Het zij den lezer tot oefening overgelaten uit deze formule of langs een anderen weg aan te toonen, dat de inhoud eener driehoekige pyramide ook gelijk is aan een zesde van het product van twee elkander kruisende ribben, hare gemeenschappelijke loodlijn en den sinus van den hoek, dien zij met elkander vormen.

113. VI[e] VRAAGSTUK. *De horizontale projectie van een hoek* BAC (fig. 44) *te berekenen, wanneer de hoeken bekend zijn, die elk der beenen van den gegeven hoek met de vertikaal* AA', *gaande door het punt* A, *vormen.*

*Oplossing.* Men plaatse in het punt A het middelpunt eens bols, waardoor de bolvormige driehoek A'BC ontstaat, en verlenge de zijden A'B, A'C tot op het horizontale vlak door A gaande. Daar de bogen A'B', A'C' hierdoor elk een kwadrant worden, zal de hoek BA'C, als door den boog B'C' gemeten, de horizontale projectie B'AC' van den gegeven hoek BAC voorstellen. Men noeme dezen laatsten hoek $\alpha$, voorts de hoeken BAA', CAA' respectievelijk $\beta$, $\beta'$. Nu zijn in den voormelden bolvormigen driehoek bekend, de drie zijden $\alpha$, $\beta$, $\beta'$, waaruit de begeerde hoek A' zal moeten bepaald worden. Stellende dezen hoek $= \varphi$, dan heeft men terstond, ingevolge form. (11) § 16,

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \beta'}{\sin \beta \sin \beta'} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

welke uitdrukking volmaakt overeenstemt met die, welke wij in het V[e] vraagstuk van § 11, ofschoon op eene minder eenvoudige wijze, met behulp der vlakke driehoeksmeting, verkregen hebben.

Voor de logarithmische berekening zal men zich echter van de volgende uit (12) van § 16 afgeleide formule bedienen

$$\sin \tfrac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta' - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \beta')}{\sin \beta \sin \beta'}}, \quad . \quad (4)$$

Daar de hoeken $\beta$, $\beta'$ bij de herleiding tot den horizon, weinig van 90° verschillen, zoo wordt in de toepassing, aan de voorgaande formulen nog een anderen vorm gegeven, die wij als voorbeeld van dergelijke vraagstukken zullen ontwikkelen.

Noemen wij de hoeken, die AB en AC met den horizon maken, $\gamma$ en $\gamma'$, dan is

$$\beta = 90^0 - \gamma, \qquad \beta' = 90^0 - \gamma',$$

en hierdoor gaat form. (3) over in

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \sin \gamma \sin \gamma'}{\cos \gamma \cos \gamma'}.$$

Zijn nu $\gamma$ en $\gamma'$ zoo klein, dat geene hoogere dan de tweede machten hunner sinussen in rekening behoeven gebracht te worden, dan is

$$\frac{1}{\cos\gamma\cos\gamma'} = (1-\sin^2\gamma)^{-\frac{1}{2}}(1-\sin^2\gamma')^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}(\sin^2\gamma + \sin^2\gamma'),$$

derhalve

$$\cos\varphi = \cos\alpha - \sin\gamma\sin\gamma' + \tfrac{1}{2}(\sin^2\gamma + \sin^2\gamma')\cos\alpha.$$

Stelt men nu

$$\varphi = \alpha + x,$$

dan is $x$ de kleine correctie, die bij $\alpha$ moet gevoegd worden, om $\varphi$ te verkrijgen en zoo klein, dat de boog gelijk aan den sinus en de cosinus gelijk aan de eenheid mag gesteld worden. Hieruit volgt

$$\cos\varphi = \cos\alpha - \sin\alpha\sin x,$$

en dus

$$\sin\alpha\sin x = \sin\gamma\sin\gamma' - \tfrac{1}{2}(\sin^2\gamma + \sin^2\gamma')\cos\alpha$$

of

$$\sin x = \frac{\sin\gamma\sin\gamma' - \tfrac{1}{2}(\sin^2\gamma + \sin^2\gamma')\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\gamma\sin\gamma'(\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha) - (\sin^2\gamma + \sin^2\gamma')(\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha)}{2\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha(\sin\gamma + \sin\gamma')^2 - \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha(\sin\gamma - \sin\gamma')^2}{2\sin\alpha}$$

derhalve

$$\sin x = \left(\frac{\sin\gamma + \sin\gamma'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha - \left(\frac{\sin\gamma - \sin\gamma'}{2}\right)^2 \cot\tfrac{1}{2}\alpha$$

Wegens de kleinheid der hoeken $\gamma$, $\gamma'$, $x$ kan men stellen

$$\sin x = x\sin 1'', \quad \sin\gamma = \gamma\sin 1'', \quad \sin\gamma' = \gamma'\sin 1'',$$

en hierdoor wordt

$$x = \tfrac{1}{4}\sin 1''(\gamma + \gamma')^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\sin 1''(\gamma - \gamma')^2\cot\tfrac{1}{2}\alpha,$$

zijnde de correctie-formule van LEGENDRE.

114. VII^e^ VRAAGSTUK. *Wanneer men door de hoekpunten eens bolvormigen driehoeks een kleinen cirkel laat gaan, vraagt men de plaats te bepalen van de pool van dezen omgeschreven cirkel.*

*Oplossing.* Zij ABC (fig. 45) de driehoek en $m$ de pool des omgeschreven cirkels, dan zal, trekkende uit $m$ de bogen van groote cirkels $m$A, $m$B, $m$C, elk dezer bogen als de spherische straal van den genoemden kleinen cirkel te beschouwen zijn. Men stelle dezen straal $=$ R, voorts $\llcorner\, m\mathrm{AB} = \llcorner\, m\mathrm{BA} = \alpha$,

$\llcorner mAC = \llcorner mCA = \beta$ en $\llcorner mBC = \llcorner mCB = \gamma$, dan is klaarblijkelijk

$$\alpha + \beta + \gamma = \tfrac{1}{2}(A + B + C) = S$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2}(A + B - C) = S - C$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(A + C - B) = S - B$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(B + C - A) = S - A.$$

Trekt men nu den loodrechten boog $mn$ op de zijde BC, dan geeft de rechthoekige driehoek $mn$ C

$$tg\, \tfrac{1}{2} a = tg\, R \cos \gamma,$$

en dus
$$\cot R = \cos (S - A) \cot \tfrac{1}{2} a.$$

Op gelijke wijze zoude men vinden

$$\cot R = \cos (S - B) \cot \tfrac{1}{2} b,$$
$$\cot R = \cos (S - C) \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Stellende hierin voor $\cot \tfrac{1}{2} a$, $\cot \tfrac{1}{2} b$, $\cot \tfrac{1}{2} c$ hare waarden volgens form. (17) § 16, dan komt er

$$\cot R = \sqrt{\frac{-\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}{\cos S}}.$$

Wil men echter den straal B door middel der drie zijden $a$, $b$, $c$ uitdrukken, zoo make men gebruik van de in § 19 gevondene formule (1):

$$-\cos S = \frac{\sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin C}{\cos \tfrac{1}{2} c} = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c} =$$
$$= \frac{P}{4 \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c},$$

welke, op elk der drie supplements-driehoeken toegepast zijnde, de drie navolgende nieuwe betrekkingen oplevert:

$$\cos \tfrac{1}{2} (A + B - C) = \cos (S - C) = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c} =$$
$$= \frac{P}{4 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} (A + C - B) = \cos (S - B) = \frac{P}{4 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} b},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} (B + C - A) = \cos (S - A) = \frac{P}{4 \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} a},$$

waardoor men voor den straal R bekomt

$$\cot R = \frac{P}{4 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c}.$$

Onderstellen wij thans, dat er om elk der drie supplements-

driehoeken op de zijden $a$, $b$, $c$, insgelijks een cirkel beschreven zij, en noemen wij de stralen dezer drie cirkels respectivelijk $R_1$, $R_2$, $R_3$, dan verkrijgen wij terstond, met behulp der voorgaande formule,

$$cot\, R_1 = \frac{P}{4\, sin\, \tfrac{1}{2} a\, cos\, \tfrac{1}{2} b\, cos\, \tfrac{1}{2} c},$$

$$cot\, R_2 = \frac{P}{4\, sin\, \tfrac{1}{2} b\, cos\, \tfrac{1}{2} a\, cos\, \tfrac{1}{2} c},$$

$$cot\, R_3 = \frac{P}{4\, sin\, \tfrac{1}{2} c\, cos\, \tfrac{1}{2} a\, cos\, \tfrac{1}{2} b},$$

waaruit verder volgt

$$\frac{tg\, R}{tg\, R_1} = tg\, \tfrac{1}{2} b\, tg\, \tfrac{1}{2} c, \qquad \frac{tg\, R_2}{tg\, R_3} = tg\, \tfrac{1}{2} b\, cot\, \tfrac{1}{2} c,$$

dus

$$tg\, \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{tg\, R\ \ tg\, R_2}{tg\, R_1\, tg\, R_3}},$$

en op gelijke wijze

$$tg\, \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{tg\, R\ \ tg\, R_1}{tg\, R_2\, tg\, R_3}},$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{tg\, R\ \ tg\, R_3}{tg\, R_1\, tg\, R_2}};$$

door welke formulen de drie zijden des driehoeks uit de vier stralen der omgeschrevene cirkels kunnen worden berekend.

*Aanmerking.* De voorgaande formulen bevatten tevens de oplossing van het vraagstuk, om binnen een drievlakkigen hoek eene lijn te trekken, makende gelijke hoeken met elke der drie ribben.

115. VIII^e^ Vraagstuk. *De plaats te bepalen van een punt binnen een bolvormigen driehoek op gelijke afstanden der drie zijden gelegen.*

*Oplossing.* Dit vraagstuk hetzelfde zijnde als dat om den sphe-rischen straal van den ingeschreven cirkel te bepalen, zoo laat $m$ (fig. 46) de pool van dezen cirkel voorstellen. Men trekke uit dat punt de loodrechte bogen $mp$, $mq$, $mr$, op de zijden des driehoeks, en verder de bogen $mA$, $mB$, $mC$, waardoor de hoeken A, B, C middendoor gedeeld worden. Zij de straal $mq = r$, $Aq = \alpha$, $Br = \beta$, $Cp = \gamma$, dan is uit de figuur gemakkelijk op te maken, dat

$$\alpha + \beta + \gamma = s, \quad \alpha = s - a, \quad \beta = s - b, \quad \gamma = s - c,$$

voorts $tg\, r = tg\, \tfrac{1}{2} A\, sin\, \alpha = tg\, \tfrac{1}{2} B\, sin\, \beta = tg\, \tfrac{1}{2} C\, sin\, \gamma$ . . (5)

of, volgens form. (21)

$$tg\,r = \sqrt{\frac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s}} = \frac{P}{2\,sin\,s} \quad . \; . \; . \; (6)$$

waardoor de straal $r$ uit de drie zijden $a$, $b$, $c$ kan worden berekend.

Stellende kortheidshalve

$$2\sqrt{\{-cos\,S\,cos\,(S-A)\,cos\,(S-B)\,cos\,(S-C)\}} = P',$$

dan zullen de in het vorige vraagstuk verkregene waarden van $cos\,S$, $cos\,(S-A)$, $cos\,(S-B)$ en $cos\,(S-C)$, voor den pooldriehoek veranderen in

$$sin\,s = \frac{cos\,\frac{1}{2}A\,cos\,\frac{1}{2}B\,sin\,c}{sin\,\frac{1}{2}C} = \frac{P'}{4\,sin\,\frac{1}{2}A\,sin\,\frac{1}{2}B\,sin\,\frac{1}{2}C},$$

$$sin\,\alpha = \frac{sin\,\frac{1}{2}B\,sin\,\frac{1}{2}C\,sin\,a}{sin\,\frac{1}{2}A} = \frac{P'}{4\,sin\,\frac{1}{2}A\,cos\,\frac{1}{2}B\,cos\,\frac{1}{2}C},$$

$$sin\,\beta = \frac{sin\,\frac{1}{2}A\,sin\,\frac{1}{2}C\,sin\,b}{sin\,\frac{1}{2}B} = \frac{P'}{4\,sin\,\frac{1}{2}B\,cos\,\frac{1}{2}A\,cos\,\frac{1}{2}C},$$

$$sin\,\gamma = \frac{sin\,\frac{1}{2}A\,sin\,\frac{1}{2}B\,sin\,c}{sin\,\frac{1}{2}C} = \frac{P'}{4\,sin\,\frac{1}{2}C\,cos\,\frac{1}{2}A\,cos\,\frac{1}{2}B},$$

en hierdoor verkrijgt men, ter berekening van $r$ door middel der drie hoeken, ingevolge formule (6)

$$tg\,r = \frac{P'}{4\,cos\,\frac{1}{2}A\,cos\,\frac{1}{2}B\,cos\,\frac{1}{2}c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Beschouwen wij insgelijks de stralen, $r_1$, $r_2$, $r_3$ der ingeschreven cirkels van drie supplements-driehoeken op de zijden $a$, $b$, $c$, dan geven de formulen (5), (6) en (7)

$$tg\,r_1 = tg\,\tfrac{1}{2}A\,sin\,s = \frac{P}{2\,sin\,(s-a)},$$

$$tg\,r_2 = tg\,\tfrac{1}{2}B\,sin\,s = \frac{P}{2\,sin\,(s-b)},$$

$$tg\,r_3 = tg\,\tfrac{1}{2}C\,sin\,s = \frac{P}{2\,sin\,(s-c)},$$

$$tg\,r_1 = \frac{P'}{4\,cos\,\frac{1}{2}A\,sin\,\frac{1}{2}B\,sin\,\frac{1}{2}C},$$

$$tg\,r_2 = \frac{P'}{4\,cos\,\frac{1}{2}B\,sin\,\frac{1}{2}A\,sin\,\frac{1}{2}C},$$

$$tg\,r_3 = \frac{P'}{4\,cos\,\frac{1}{2}C\,sin\,\frac{1}{2}A\,sin\,\frac{1}{2}B},$$

waaruit volgt

$$\frac{tg\,r}{tg\,r_1} = tg\,\tfrac{1}{2}\,B\,tg\,\tfrac{1}{2}\,C. \qquad \frac{tg\,r_3}{tg\,r_2} = tg\,\tfrac{1}{2}\,C\,cot\,\tfrac{1}{2}\,B.$$

Derhalve
$$tg\,\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{tg\,r\;\;tg\,r_3}{tg\,r_1\,tg\,r_2}},$$

en op gelijke wijze zal men vinden

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{tg\,r\;\;tg\,r_1}{tg\,r_2\,tg\,r_3}},$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{tg\,r\;\;tg\,r_2}{tg\,r_1\,tg\,r_3}};$$

welke formulen dienen om de hoeken des driehoeks uit de stralen der vier ingeschreven cirkels te berekenen, en de meeste overeenkomst vertoonen met die voor de omgeschreven cirkels in het vorige vraagstuk gevonden.

Noemen wij nog de stralen der om- en ingeschreven cirkels voor den pooldriehoek R′ en $r'$, dan volgt uit de beide hiervoor betoogde formulen

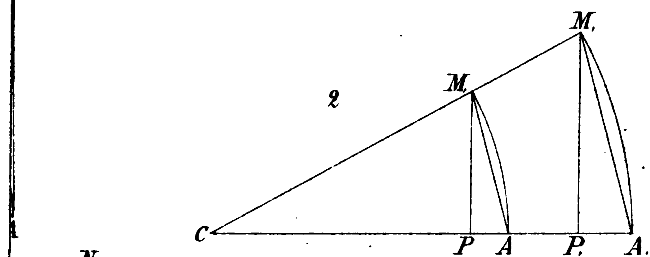
$$cot\,R = cos\,(S - A)\,cot\,\tfrac{1}{2}\,a$$
$$tg\,r = tg\,\tfrac{1}{2}\,A\,sin\,(s - a),$$

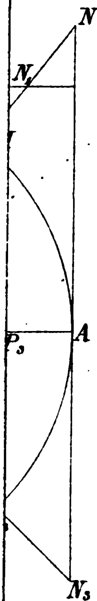
op de bekende wijze

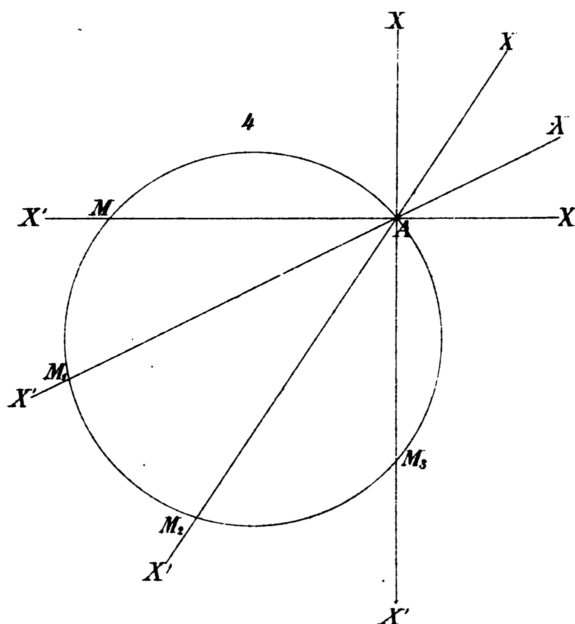
$$cot\,R' = sin\,(s - a)\,tg\,\tfrac{1}{2}\,A,$$
$$tg\,r' = cos\,(S - A)\,cot\,\tfrac{1}{2}\,a.$$

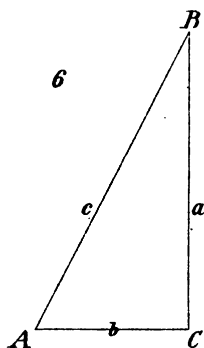
Derhalve $\quad cot\,R' = tg\,r \quad$ en $\quad tg\,r' = cot\,R,$

waaruit wij deze merkwaardige eigenschap leeren kennen, *dat de spherische stralen der om- en ingeschreven cirkels eens driehoeks de complementen zijn van die der in- en omgeschreven cirkels van den pooldriehoek.*

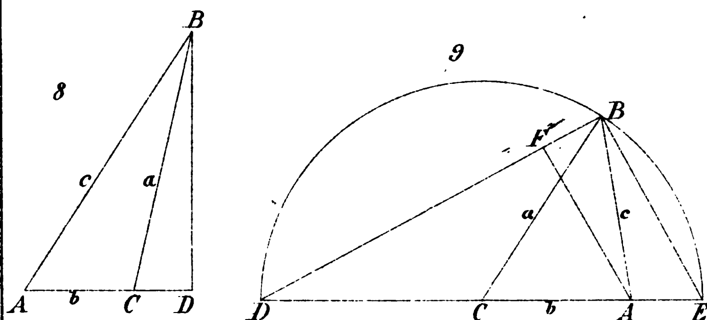


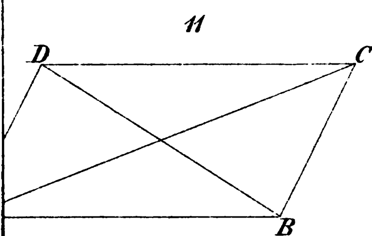



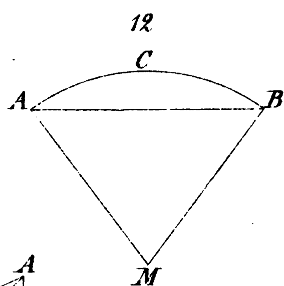



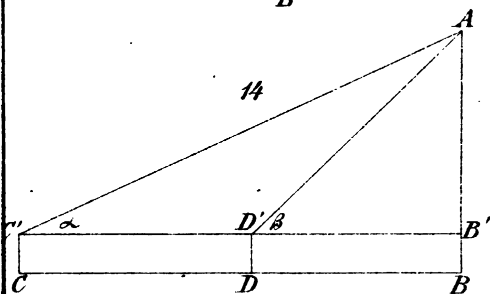



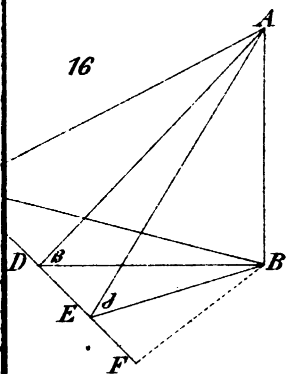

Lith. Emrik & Binger.

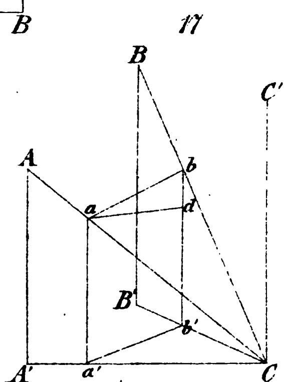


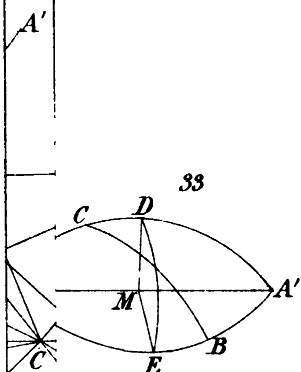



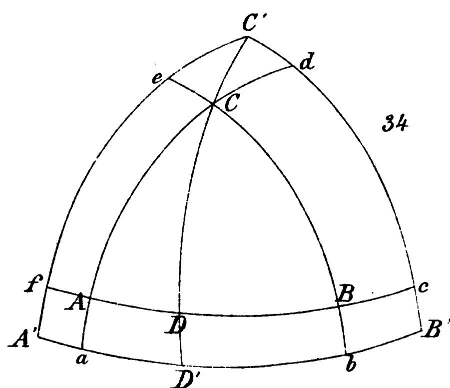



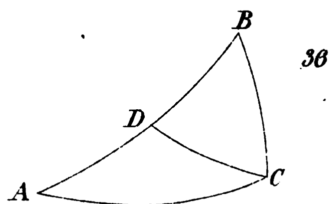



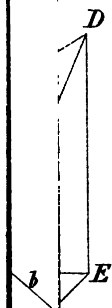



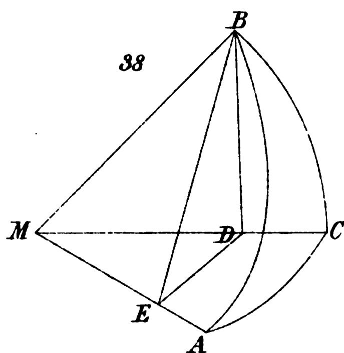

Lith. Emrik & Binger.




Lith. Emrik & Binge

